



Tesis doctoral

**ESTADÍSTICA ESPACIAL DE LAS  
ABERRACIONES OCULARES A PARTIR DE  
LOS CENTROIDES DE SENSORES  
HARTMANN-SHACK**

**Eliseo Pailos Núñez**

**Departamento de Física Aplicada, Área de Óptica**

**Universidade de Santiago de Compostela**



# Informe del director de la tesis

D. Salvador X. Bará Viñas, profesor titular de universidade do Departamento de Física Aplicada (Área de Óptica) da Universidade de Santiago de Compostela,

Informa favorablemente

Sobre a presente memoria, titulada “Estadística espacial de las aberraciones oculares a partir de los centroides de sensores Hartmann-Shack”, que recolle os resultados do traballo realizado por D. Eliseo Pailos Núñez baixo a súa dirección e supervisión, e constitúe a Tese de Doutoramento que presenta para a obtención do título de Doutor pola Universidade de Santiago de Compostela.

En Santiago de Compostela, a 1 de Setembro de 2011

Asdo.: O director da Tese,

Asdo.: O Doutorando,

D. Salvador X. Bará Viñas

D. Eliseo Pailos Núñez

Una parte sustancial de los trabajos de investigación recogidos en esta tesis ha sido realizada en el marco de los proyectos de investigación FIS2005-05020-C03-02, “NUEVOS ESTUDIOS Y DESARROLLOS PARA LA MEDIDA Y COMPENSACIÓN DE ABERRACIONES OCULARES Y DE LA PRESBICIA”, y FIS2008-03884/FIS, “SISTEMAS DE ÓPTICA ADAPTATIVA CON MODULADORES ESPACIALES DE LUZ DE BAJO COSTE. APLICACIONES A ÓPTICA VISUAL”, financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación, el Ministerio de Educación y Ciencia y el FEDER.

El autor agradece la concesión de una beca predoctoral FPU por parte del Ministerio de Educación y Ciencia, nro. AP2004-0122, de la que disfrutó entre los años 2005 y 2008.



# Publicaciones relacionadas con la tesis

## Artículos

**Pailos, E.**, Ommani, A., Diaz-Santana, L. y Bará, S. (2010), "Centroid displacement statistics of the eye aberration", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 27, nro. 8, pp. 1818-1827.

Arines, J., **Pailos, E.**, Prado, P. y Bará, S. (2009), "The contribution of the fixational eye movements to the variability of the measured ocular aberration", *Ophthalm. Physiol. Opt.*, vol. 29, nro. 3, pp. 281-287.

## Comunicaciones a congresos

**Pailos, E.**, Ommani, A., Diaz-Santana, L. y Bara, S., "A New Approach for the Study of the Spatial Statistics of the Eye Aberration", ARVO (2-6 mayo 2010, Fort Lauderdale, Estados Unidos), *Invest.Ophthalmol.Vis.Sci.* (2010), vol. 51, E-Abstract 3952 (<http://abstracts.iovs.org/cgi/content/abstract/51/5/3952>).

**Pailos, E.**, Bará, S., Ommani, A. y Diaz-Santana, L., "Estadística de gradientes del frente de ondas en aberrometría ocular", IX Reunión Nacional de Óptica (14-17 septiembre 2009, Ourense, España), *Resúmenes de las comunicaciones*, p. 38, comunicación PRL-2, ISBN 978-84-692-5024-2, D. Legal: OU 143-2009 (comunicación completa en la edición electrónica: <http://optics.uvigo.es/rno.htm>).

Arines, J., **Pailos, E.**, Prado, P. y Bará, S., "The contribution of the fixational eye movements to the variability of the measured ocular aberrations", 4th European Meeting in Visual & Physiological Optics (31 agosto-2 septiembre de 2008, Heraklion, Grecia), *Scientific Program and Book of Abstracts*, p. 36.



# **Declaración de originalidad**

Esta tesis recoge los trabajos realizados y los resultados obtenidos por su autor, Eliseo Pailos Núñez, bajo la dirección de Salvador X. Bará Viñas en el Área de Óptica del Dpto. de Física Aplicada de la Universidade de Santiago de Compostela. Parte del contenido de la tesis es fruto del trabajo, las ideas y propuestas del director. Además, algunas de las tareas desarrolladas y de los resultados se han beneficiado de la participación de otras personas. A continuación se reseñan sus contribuciones.

## **Capítulo 4**

El estudio realizado en la sección 4.3 acerca de las consecuencias de la no consideración de los movimientos oculares en la estimación de las aberraciones oculares es fruto de la colaboración entre Justo Arines Piferrer, Paula Prado Gesto, Salvador X. Bará Viñas y el doctorando.

## **Capítulo 5**

Las medidas aberrométricas de dos ojos usadas en el apartado 5.5.2 fueron obtenidas con anterioridad a la incorporación del doctorando al grupo de Salvador Bará. El responsable del montaje experimental fue Justo Arines Piferrer, que tomó los datos en colaboración con Paula Prado Gesto.

## **Capítulo 6**

El montaje del sensor HS de ese capítulo, así como los programas informáticos utilizados para estimar la posición de los centroides y seguir la posición de la pupila ocular fueron desarrollados por el grupo de Luis Diaz-Santana, de la City University (Londres). En las secciones 6.1 y 6.2 se describen dicho montaje, el proceso de medida y los algoritmos aplicados por los programas; las contribuciones del doctorando a los mismos se mencionan explícitamente. La toma de los datos de Londres fue realizada por Abbas Ommani.



# Agradecimientos

Me gustaría empezar mostrando mi agradecimiento a mi director de tesis, Salvador X. Bará Viñas. Es un acto de simple justicia, pues gran parte de la tesis bebe de su trabajo e ideas. Quiero agradecer también la paciencia que ha demostrado durante el prolongado proceso de redacción de este trabajo, aunque tratase de disimularla mencionando la palabra “tesis” cada vez que nos cruzábamos en los pasillos. Mi gratitud también a Rafael Navarro Belsué, por todo lo que aprendí con él en los casi dos años y medio que pasé en Zaragoza y, muy especialmente, por ayudarme cuando quise cambiar de tema de tesis y volver a Santiago de Compostela.

Luis Diaz-Santana, de la City University, y Stephen A. Burns, de la Indiana University, merecen ser mencionados por acogerme en sus grupos de investigación en las dos estancias breves de las que disfruté. Los datos aberrométricos tomados en la City University a los que tuve acceso han sido fundamentales para poder aplicar los métodos propuestos en la tesis. Mi estancia en Bloomington, casi al final de mi etapa en Zaragoza, no originó ningún artículo, pero me permitió conocer de primera mano a uno de los investigadores, uno de los grupos y uno de los centros más pujantes del área.

Aprovecho la ocasión para decirles a los coautores de mis artículos y comunicaciones, así como a mis compañeros de grupo(s), que ha sido un placer trabajar con ellos. También quiero acordarme del resto de compañeros, tanto de Santiago como de Zaragoza y, en algún caso extraño, de Santiago y de Zaragoza. Estos años no habrían sido iguales sin los cafés compartidos (menos en Santiago, lo sé), las conversaciones ocasionales de despacho o pasillo, las clases de aikido o las partidas al *Bombberman*.

Quiero agradecerle a mi familia su apoyo. En ningún momento han perdido su confianza en mí, ni cuando decidí cambiar de tren ni últimamente, cuando mis ligeras demoras en la redacción habrían quitado la paciencia a cualquiera. Tampoco la perdió mi abuela, que no pudo llegar a ver la tesis terminada, a quien conseguí explicar que aunque estuviese haciendo un estudio sobre la óptica del ojo eso no me convertía en un oftalmólogo.

Unas últimas palabras de agradecimiento a Carlos, por compartir su tiempo conmigo y por pedirme que sonría.



# Resumen

A diferencia de los que sucede en otras áreas, como la óptica atmosférica, en la actualidad no se dispone de modelos consolidados que describan la estadística espacial y temporal de las aberraciones del ojo humano. En la tesis se hace una revisión crítica de algunas de las propuestas de modelo de la estadística espacial de la población de ojos con visión normal. Los modelos aportarían ventajas clínicas, impulsarían la creación de modelos de ojo más elaborados, describirían las aberraciones con independencia del instrumento de medida y permitirían cuantificar el error de reconstrucción de un sensor para cada población y el uso de métodos de estimación más sofisticados.

Para ayudar al desarrollo de modelos de la estadística espacial, en la tesis se presentan unos métodos basados en el uso de los desplazamientos de los centroides de las irradiancias medidos con sensores Hartmann-Shack. Algunos de los procedimientos se han usado previamente en óptica atmosférica, pero es la primera vez que se aplican al caso ocular. Los métodos rechazan o no una propuesta de estadística comparando las predicciones que ese modelo hace de magnitudes estadísticas de los centroides con las estimaciones experimentales de las mismas. La principal magnitud usada es la función de estructura de los centroides, pero se consideran otras funciones y diagramas. Se discuten las ventajas de los procesos frente a otros que reconstruyen la aberración.

Las técnicas se pueden aplicar para caracterizar la estadística espacial de tanto ojos individuales como poblaciones de ojos. En un estudio preliminar, se estudia la estadística individual de dos ojos con visión normal. Más adelante, los métodos se aplican al análisis de las estadísticas individuales y poblacionales de muestras más amplias de ojos, medidas con un sensor diferente. En particular, se usa una prueba chi cuadrado para estudiar la compatibilidad de las predicciones de dos modelos de la aberración con las magnitudes estadísticas experimentales de los centroides. Estos dos modelos son leyes de potencias y un modelo de fluctuaciones de desenfoque con traslaciones transversales de pupila. Los resultados muestran que para la aplicación del método al caso ocular es importante reducir los niveles de incertidumbre de los datos, con el fin de mejorar su capacidad para rechazar propuestas que no describen bien las curvas experimentales y mejorar su sensibilidad a las fluctuaciones de los modos de alto orden.

**Abstract:** Unlike what happens in fields like atmospheric optics, nowadays we lack of consolidated models of the spatial and temporal statistics of the human eye aberrations. In this thesis we critically review some of the proposals made to model the spatial statistics of populations of eyes with normal vision. The models would provide us with clinical advantages, would boost the creation of more elaborated eye models, would provide an instrument-independent description of the aberrations, and would allow us to quantify the reconstruction error of a sensor for each population and to use more sophisticated estimations methods.

In order to aid in the development of models of the spatial statistics, in this thesis we present some methods based on the usage of the displacements of the irradiance centroids measured with Hartmann-Shack sensors. Some of the procedures have been previously used in atmospheric optics, though it's the first time they are applied to the ocular case. The methods reject or don't reject a proposal of statistics by comparing the predictions of that model for some statistical magnitudes of the centroids with the experimental estimates of the same magnitudes. The main magnitude used is the centroid structure function, but other functions and diagrams are considered. The advantages of the procedures over others that do estimate the aberrations are discussed.

The techniques may be applied to the characterization of the spatial statistics of either individual eyes or eye populations. In a preliminary study, the individual statistics of two eyes with normal vision are studied. Later, the methods are applied to the analysis of the individual and population statistics of wider samples of eyes, measured with a different sensor. In particular, a chi-square test is used to study the compatibility of the predictions of two aberration models with the experimental statistical magnitudes of the centroids. These two models are the power-laws and a model of defocus fluctuations with pupil transverse translations. The results show that for the application of the methods to the ocular case it is important to reduce the uncertainty levels of the data in order to increase its ability to reject proposals that do not correctly describe the experimental curves and to increase its sensitivity to the fluctuations of high order modes.



# Índice

<b>Informe del director de la tesis .....</b>	<b>iii</b>
<b>Publicaciones relacionadas con la tesis .....</b>	<b>v</b>
<b>Declaración de originalidad .....</b>	<b>vii</b>
<b>Agradecimientos .....</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen .....</b>	<b>xi</b>
<b>Índice .....</b>	<b>xiii</b>
<b>Glosario .....</b>	<b>xvii</b>

## **Capítulo 1. Introducción..... 1**

1.1	Objetivo y contenido de la tesis .....	3
-----	--	---

## **Capítulo 2. Sensor Hartmann-Shack ..... 7**

2.1	Ecuación de propagación del centroide de la irradiancia.....	9
2.2	Principio del sensor .....	11
2.2.1	Descripción del sensor .....	11
2.2.2	Modelo teórico.....	13
2.2.3	Expresiones alternativas y particularizaciones del modelo .....	16
2.3	Estimación experimental de los centroides.....	19
2.3.1	Modelo de medida del Hartmann-Shack .....	21

## **Capítulo 3. Estadística espacial y estimación de la aberración .....23**

3.1	Descripción de la estadística espacial del frente de ondas.....	24
3.1.1	Representación directa del frente de ondas .....	25
3.1.2	Representación modal del frente .....	27
3.1.3	Ventajas del conocimiento de la estadística de las aberraciones.....	30
3.1.4	Ejemplo: modelo de Kolmogorov de la turbulencia atmosférica .....	32

3.2	Estimación modal .....	34
3.2.1	Estimación por mínimos cuadrados.....	36
3.2.2	Otros procedimientos.....	38
3.3	Evaluación de las estimaciones.....	39
3.3.1	Evaluación en términos de la función característica .....	41
a)	Modificación de la estadística del frente y error de estimación .....	43
3.3.2	Evaluación usando la representación matricial .....	44
a)	Modificación de la estadística del frente y error de estimación .....	50
<b>Capítulo 4. Estadística de las aberraciones oculares .....</b>		<b>59</b>
4.1	Estadística de poblaciones de ojos.....	60
4.2	Dinámica temporal de las aberraciones oculares .....	64
4.3	Transformaciones en el sistema de referencia de la pupila.....	67
4.4	Desarrollos y observaciones basados en algunos estudios previos.....	73
4.4.1	Estudio de Cagigal et al. (2002) .....	73
a)	Homogeneidad de las aberraciones .....	74
b)	Espectro de potencias de la aberración estimada.....	75
c)	Espectro de potencias con los datos de Thibos et al.....	90
d)	Conclusiones.....	92
4.4.2	Estudios de Thibos et al. (2002) .....	92
<b>Capítulo 5. Estadística de aberraciones a partir de los centroides ....</b>		<b>101</b>
5.1	Estudio de propuestas de modelos de estadística.....	102
5.2	Diagramas de centroides .....	104
5.3	Función de estructura de los gradientes del frente.....	109
5.3.1	Microentes cuadradas y aberraciones homogéneas o isótropas .....	111
5.4	Modelos estadísticos de las aberraciones.....	113
5.4.1	Modelo de ley de potencias .....	114
5.4.2	Modelo de fluctuaciones de desenfoque.....	116
a)	Contribución de los prismas .....	119
b)	Contribución de los astigmatismos.....	120
5.5	Aplicación al estudio de ojos individuales .....	121
5.5.1	Particularidades de la aplicación .....	121

5.5.2	Ejemplo: estudio de la estadística de dos ojos.....	124
<b>Capítulo 6. Recogida y procesado de datos experimentales.....</b>		<b>141</b>
6.1	Recogida de medidas .....	142
6.1.1	Muestra de ojos.....	142
6.1.2	Montaje óptico y sensor de frente de ondas .....	142
6.2	Estimación de los desplazamientos de los centroides.....	145
6.2.1	Procesado de las referencias .....	145
6.2.2	Seguimiento de la pupila y eliminación de parpadeos .....	147
6.2.3	Estimación de las posiciones de los centroides .....	148
6.2.4	Interfaz gráfica.....	149
6.3	Estimación de las magnitudes estadísticas de los centroides.....	150
6.3.1	Preparación de los datos .....	150
6.3.2	Ruido .....	152
<b>Capítulo 7. Estadística individual y poblacional de la muestra principal de ojos .....</b>		<b>155</b>
7.1	Estadística de ojos individuales .....	156
7.1.1	Ojos presentados.....	156
7.1.2	Ojos del grupo joven .....	157
a)	Diagramas de centroides.....	157
b)	Varianzas de los centroides .....	159
c)	Funciones de estructura .....	165
d)	Parámetros tau .....	172
7.1.3	Ojos del grupo de mediana edad.....	175
a)	Diagramas de centroides.....	175
b)	Varianzas de los centroides .....	176
c)	Funciones de estructura .....	180
d)	Parámetros tau .....	186
7.2	Estadística de poblaciones de ojos.....	188
7.2.1	Resultados.....	188
7.2.2	Modelo de fluctuaciones de desenfoque y astigmatismo .....	194
7.3	Discusión .....	195

7.3.1	Métodos propuestos basados en los centroides .....	195
7.3.2	Ventajas frente al uso de magnitudes de la aberración estimada .....	197
7.3.3	Limitaciones y desventajas de los métodos propuestos .....	198
7.3.4	Aplicación de los métodos al caso ocular.....	200
7.3.5	Diferencias entre las dos muestras de ojos utilizadas.....	201
7.3.6	Resultados obtenidos con ojos individuales .....	203
7.3.7	Resultados obtenidos para poblaciones de ojos.....	208
7.3.8	Trabajo futuro .....	209
<b>Capítulo 8. Conclusiones .....</b>		<b>211</b>
<b>Apéndice I .....</b>		<b>217</b>
a)	Demostración de la proposición iii para subpupilas circulares .....	217
b)	Demostración de la proposición iii para subpupilas cuadradas .....	218
c)	Demostración de la proposición iv para subpupilas circulares .....	219
d)	Demostración de la proposición iv para subpupilas cuadradas .....	220
<b>Bibliografía.....</b>		<b>221</b>

# Glosario

**ERF:** sistema de referencia ligado a la pupila ocular.

**HS:** Hartmann-Shack (o sensor Hartmann-Shack).

**KL:** Karhunen-Loève (funciones de).

**LASIK:** queratomileusis in situ asistida por láser.

**LRT:** trazado de rayos con láser.

**LSSF:** función de estructura longitudinal de una de las componentes de los desplazamientos de los centroides.

**MPP:** pseudo-inversa de Moore-Penrose.

**MTF:** módulo de la función de transferencia óptica (o función de transferencia de la modulación).

**PSF:** función de respuesta de impulso.

**RSCE:** efecto Stiles-Crawford reflectométrico.

**SNR:** relación señal ruido.

**SRE:** errores refractivos equivalentes.

**SRR:** refractómetro espacialmente resuelto.

**SSF:** función de estructura de los desplazamientos de los centroides.

**TSSF:** función de estructura transversal de los desplazamientos de los centroides.

**WSRF:** sistema de referencia fijo respecto al sensor de frente de ondas.



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

Las aberraciones monocromáticas de alto orden se definen tradicionalmente como aquellas que no pueden ser corregidas con lentes esféricas y cilíndricas. En los últimos quince años, su medida y estudio en el ojo humano han despertado un notable interés en la comunidad científica. De este hecho fue responsable en buena medida la adopción de sensores y técnicas desarrollados inicialmente en los ámbitos de la óptica atmosférica y astronómica, como el sensor Hartmann-Shack (HS) (Shack y Platt 1971, Platt y Shack 2001) o la óptica adaptativa (Liang et al. 1994, Liang et al. 1997). En este periodo de tiempo la aberrometría ocular se ha consolidado como una importante herramienta en las investigaciones realizadas en las ciencias de la visión y ha encontrado incluso varias aplicaciones clínicas.

Una de las consecuencias más relevantes del desarrollo de las técnicas de medida de las aberraciones oculares ha sido la mejora del contraste y la resolución de los instrumentos usados para realizar imagen del fondo de ojo. Estas mejoras se han logrado tanto con la fabricación de láminas de fase (Navarro et al. 2000, Burns et al. 2002), que ofrecen una corrección estática que compensa parcialmente las aberraciones de cada ojo, como con la corrección dinámica conseguida con la óptica adaptativa. Además, la posibilidad de compensar o de modificar las aberraciones posibilita la realización de experimentos psicofísicos que estudian la influencia de las aberraciones oculares en una determinada tarea visual (Artal et al. 2004, Chen et al. 2005).

Otro de los campos en el que las aberraciones oculares han sido aplicadas es en la cirugía refractiva. Su uso ha permitido analizar la calidad óptica de las correcciones conseguidas con procedimientos como la cirugía LASIK (Moreno-Barriuso et al. 2001a). Además, ha abierto la puerta a la elaboración de nuevas técnicas de ablación que no sólo persiguen la compensación de los errores refractivos de esfera y cilindro, sino también de aberraciones de más alto orden (Marchese et al. 2005, Campbell 2006).

Otra aplicación a mencionar son los modelos de ojo personalizados. En estos trabajos se busca representar a cada ojo por una serie de componentes ópticos que reproduzcan las aberraciones experimentales (Navarro et al. 2006). Algunos parámetros de estos componentes se toman de modelos de ojo generales; otros, como la topografía corneal o los espesores axiales, se miden con la tecnología disponible; los valores de un tercer grupo se obtienen tras una optimización. El uso de datos de aberraciones de diferentes excentricidades podría evitar ciertas ambigüedades encontradas en la optimización (Goncharov et al. 2008). Estos modelos se podrían aplicar para la realización de simulaciones, para estudiar la efectividad de tratamientos de corrección personalizada de la óptica ocular o para analizar la contribución de los diferentes elementos del ojo a las aberraciones de todo el sistema.

Otro tipo de estudios intenta predecir la refracción o la agudeza visual a partir de las medidas de aberrometría. Así, se puede mencionar el trabajo de Guirao y Williams sobre la estimación de la refracción subjetiva, es decir, de la corrección esférico-cilíndrica con la que una persona obtiene el mejor resultado en una tarea de reconocimiento de caracteres (Guirao y Williams 2003). Los autores encontraron que algunas métricas de la calidad de imagen en retina, calculadas a partir de las aberraciones, proporcionan una buena estimación de la refracción. Inspirados por este trabajo, otros autores estudiaron la capacidad de múltiples métricas derivadas de las aberraciones para predecir el resultado de las refracciones subjetivas o de las pruebas de agudeza visual (Cheng et al. 2004b, Thibos et al. 2004, Applegate et al. 2006). Se han propuesto alternativas más complejas, que incluyen modelos con una regla de decisión tipo observador ideal (Nestares et al. 2003). Este modelo ofrece una predicción absoluta de la agudeza visual, sin necesidad de ningún tipo de ajuste. Ha mostrado resultados equiparables a los de las mejores métricas, tanto en la predicción de la agudeza visual como de la profundidad de foco (Dalimier et al. 2009).

La caracterización de la dinámica temporal o de las propiedades estadísticas de las aberraciones oculares puede ayudar a profundizar en las aplicaciones presentadas o a desarrollar otras nuevas. En la actualidad, existe una amplia variedad de estudios sobre la dinámica y la estadística de las aberraciones estimadas con sensores de frente de onda (Hofer et al. 2001a, Porter et al. 2001, Cagigal et al. 2002, Castejón-Mochón et al. 2002, Thibos et al. 2002b). Algunos de estos trabajos se centran en las propiedades espaciales de poblaciones de ojos con ciertas características, mientras que otros describen las fluctuaciones temporales de ojos individuales. Estos estudios pueden ser útiles para



desarrollar aplicaciones diagnósticas. Para ello es necesario establecer las fronteras entre las funciones de aberración pertenecientes a las poblaciones de ojos normales y las que se asocian a alguna patología. También pueden servir para simular el impacto que un determinado tratamiento (e. g., una lente intraocular) va a tener en la población de ojos a la que se destine o para desarrollar modelos de ojo más completos, que expliquen las fluctuaciones temporales de las aberraciones o su variabilidad en una población.

El éxito alcanzado en las diferentes aplicaciones mencionadas es una garantía del buen funcionamiento de los aberrómetros oculares. No obstante, es conveniente cierta cautela a la hora de analizar las magnitudes derivadas directamente de las aberraciones estimadas con los sensores de frente de onda. Además de la propagación del ruido de medida, los coeficientes de Zernike estimados se ven afectados por un sesgo ligado al proceso de estimación (Herrmann 1981, Bará 2003, Diaz-Santana et al. 2005). Aunque dicho sesgo sea moderado, su falta de consideración puede llevar a la adopción de conclusiones erróneas acerca de la estadística real de las aberraciones (Bará et al. 2006b).

La existencia de un sesgo y de ruido de medida hace adecuado distinguir entre las aberraciones oculares reales y las estimadas en un sensor, así como entre sus respectivas estadísticas. Hecha esta distinción, es conveniente disponer de un modelo teórico de la estadística espacial de las aberraciones reales. Dicho modelo habría de ser formulado idealmente a partir de principios físicos y de la información aportada por los datos experimentales. En primer lugar, el modelo proporcionaría una descripción de las aberraciones independiente del sensor de medida, ya que el sesgo de la estimación depende del instrumento. Además, con dicho modelo se podría cuantificar la capacidad de un sensor para reconstruir las aberraciones de una determinada población, usando métricas como el error cuadrático medio. Esto permitiría a su vez hallar la configuración óptima del sensor para medir cada población. Finalmente, a semejanza de lo que sucede en óptica atmosférica y astronómica, se podrían utilizar otras técnicas de estimación en aberrometría (o de corrección en óptica adaptativa) que usasen información *a priori* de la estadística ocular (Wallner 1983, Bakut et al. 1994, Law y Lane 1996).

## 1.1 Objetivo y contenido de la tesis

El objetivo de la tesis es desarrollar y aplicar una serie de métodos para estudiar la compatibilidad de propuestas de modelos de la estadística espacial de las aberraciones

oculares con los datos medidos por un HS. El procedimiento, usado con éxito en óptica atmosférica (Nicholls et al. 1995, Silbaugh 1995), prescinde de la reconstrucción de las aberraciones. En su lugar, se trabaja con los desplazamientos angulares de los centroides del HS, estimados a partir de los *spots* formados por sus microlentes. Así se evita el sesgo inherente a la estimación del frente y se simplifica el proceso. El procedimiento se puede usar tanto para caracterizar la estadística espacial de las aberraciones de series de medidas de ojos individuales como para poblaciones de ojos.

Los métodos propuestos siguen un enfoque popperiano o falsacionista. El primer paso consiste en elegir el modelo de estadística de las aberraciones a someter a prueba. Como se mostrará en la tesis, los propios desplazamientos experimentales de los centroides contienen información útil para guiar esta elección. En el segundo paso se calculan las predicciones teóricas de ciertas magnitudes estadísticas de los desplazamientos de los centroides asociadas al modelo supuesto para las aberraciones. Dicho cálculo se realiza utilizando la misma configuración del sensor que en los experimentos. En el tercer paso se estiman los valores de las mismas magnitudes estadísticas de los centroides a partir de los datos experimentales. Para ello, es necesario disponer de un modelo de la estadística del ruido que permita evaluar la influencia del mismo. En el cuarto paso se usa una prueba de chi cuadrado para comparar los valores predichos teóricamente con las estimaciones experimentales. Si no se supera la prueba para el nivel de confianza exigido (y si se supone que el experimento y el procesado de datos se realizan correctamente), se descarta la validez del modelo teórico postulado. Se ha de elegir entonces otro modelo y empezar de nuevo. Si las predicciones teóricas son compatibles con los datos, se concluye que el modelo es una propuesta razonable para el nivel de incertidumbre presente. En ningún caso se “valida” un modelo usando únicamente una prueba de este tipo, ya que siempre habrá múltiples candidatos que la superen.

El **capítulo 2**, de carácter introductorio, describe y discute el principio físico del HS, el sensor de frente de ondas utilizado en la tesis. Se recogen diferentes expresiones del modelo más usado en la bibliografía para este sensor. Dicho modelo relaciona los desplazamientos angulares de los centroides de las distribuciones de irradiancia en el plano de la cámara del sensor con los gradientes del frente de onda en cada microlente. También se discute la estimación de las posiciones de los centroides a partir de las imágenes de la cámara.

El **capítulo 3**, también introductorio, repasa los conceptos y problemas relacionados con la representación y estimación de las aberraciones y de su estadística. En primer lugar, se revisan las herramientas utilizadas en la literatura para representar a la función de aberración y a sus magnitudes estadísticas. Después, se repasa la estimación de las aberraciones a partir de las medidas de un sensor de gradiente del frente de ondas, como el HS. Se usan las elecciones más comunes en la bibliografía: representación modal y estimador de mínimos cuadrados. Otro de los objetivos de este capítulo es motivar la necesidad de estudiar la estadística espacial de las aberraciones. Por ello, también se mencionan una serie de problemas cuya resolución requiere de la formulación de un modelo estadístico adecuado. Por último, se discuten los efectos que el sesgo de la estimación y la propagación del ruido introducen en las aberraciones estimadas y en su estadística.

En el **capítulo 4** se revisa el estado del arte del estudio de la estadística espacial y temporal de las aberraciones monocromáticas del ojo humano. Además, también se presentan algunos desarrollos y resultados originales de la tesis. Así, en la sección 4.3 se usan simulaciones numéricas para estudiar la influencia de los movimientos oculares, y en particular de las traslaciones transversales, en la estimación de la aberración. Los resultados presentados en esta sección han originado una publicación de la que el doctorando es coautor (Arines et al. 2009). En la sección 4.4 se revisan críticamente los dos principales modelos usados en la bibliografía para caracterizar la estadística de las aberraciones de poblaciones de ojos con visión normal: el de Kolmogorov y el de Thibos. En el apartado 4.4.1 se concluye que la metodología empleada en la literatura para afirmar que dicha estadística sigue un modelo de Kolmogorov es inapropiada e insuficiente. En el apartado 4.4.2 se compara el modelo propuesto por Thibos con el de Kolmogorov, recalcando sus diferencias. En general, en la sección 4.4 se resalta la importancia de estudiar la influencia de factores como la configuración del sensor, la propagación del ruido o la representación del frente mediante un conjunto finito de polinomios en la estimación, a fin de no llegar a conclusiones precipitadas acerca de la estadística real de las aberraciones.

El **capítulo 5** describe los métodos empleados para el estudio de la estadística espacial de las aberraciones oculares a partir de los desplazamientos de los centroides de un HS. Se presentan las magnitudes estadísticas de los centroides y las gráficas usadas para tal fin. También se presentan las fórmulas que permiten relacionar la estadística de segundo orden de los centroides con la estadística postulada para las aberraciones. Estas

expresiones se particularizan para dos situaciones de interés: un modelo de ley de potencias (cuyas ecuaciones fueron derivadas previamente por autores del área de la óptica atmosférica) y un modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque con traslaciones de pupila (cuyas ecuaciones son un resultado original de la tesis). Los métodos se aplican al análisis de la estadística de dos ojos, cuyas medidas se tomaron en un estudio preliminar con un sensor distinto al de los capítulos 6 y 7.

El **capítulo 6** recoge los métodos experimentales usados para la medida de las aberraciones del grupo principal de ojos. Se mencionan las características de la muestra de ojos, del protocolo de medida, del montaje y del HS utilizados. Los datos los tomó el grupo de Luis Diaz-Santana (City University, Londres). También se comenta el procesamiento de datos utilizado para: la estimación de los centroides, el seguimiento de la pupila y para presentar los datos de manera adecuada para la realización del estudio. Por último, se presenta la serie temporal utilizada para estimar las varianzas del ruido.

El **capítulo 7** presenta los resultados obtenidos al estudiar la estadística espacial de las aberraciones de la muestra de ojos del capítulo 6 a partir de los desplazamientos de los centroides medidos con el HS. Se usan, por tanto, los métodos propuestos en el capítulo 5. En la sección 7.1 se analiza la estadística de las fluctuaciones de la aberración en ojos individuales de personas con visión normal, tanto individuos jóvenes como de mediana edad. En particular, se comparan los resultados experimentales obtenidos para diferentes magnitudes estadísticas de los centroides con los predichos por los modelos introducidos en el capítulo 5. Este estudio ha originado una publicación (Pailos et al. 2010). A continuación, en la sección 7.2 se indica cómo aplicar los métodos al estudio de la estadística poblacional y se presentan los resultados a los que se llega al analizar un conjunto de ojos de nuestra muestra. Finalmente, en la sección 7.3 se comenta la aplicación realizada en la tesis de los métodos del capítulo 5 al área de la óptica ocular, se discuten los resultados obtenidos y se señalan diferentes temas pendientes que pueden ser objeto de investigaciones futuras.

El **capítulo 8** contiene las conclusiones de la tesis.

El **apéndice I** demuestra algunas proposiciones de la tesis enunciadas en la sección 5.2.

## Capítulo 2

# SENSOR HARTMANN-SHACK

El HS se desarrolló en el ámbito de la astronomía a finales de los años 60 (Platt y Shack 2001). El ejército de Estados Unidos estaba interesado en la mejora de las imágenes de satélites capturadas desde telescopios terrestres, proyecto que encomendó a científicos de la Universidad de Arizona. Para lograr este objetivo, era necesario disponer de un sensor que permitiese medir en tiempo real las perturbaciones aleatorias introducidas por la atmósfera en la fase de los haces de luz que se propagaban a través de ella. El punto de partida fue el test de Hartmann, usado para estudiar la calidad óptica de los telescopios. Dicho test se basa en la inserción en la apertura del telescopio de una máscara opaca con una serie de huecos por los que se transmite la luz. Cada una de estas subaperturas en las que se divide el frente de ondas es la responsable de la aparición de un pequeño *spot* en el plano focal del telescopio. Usando una película fotográfica, se registraban las distribuciones de irradiancia en dos planos ligeramente desplazados respecto del foco. A partir de las posiciones de los centroides de los dos *spots* correspondientes a cada subapertura y de la separación entre los planos de observación se obtiene el ángulo de propagación del centroide de la irradiancia que atraviesa cada hueco. Como se muestra en la sección 2.1, cada ángulo se encuentra relacionado con el gradiente local del frente de ondas en su subapertura, lo que permite estimar el frente a partir de las medidas de irradiancia. La novedad que aportó el HS respecto a su predecesor fue la sustitución de la máscara por una matriz de lentes. Esta idea fue introducida por Roland Shack con la finalidad de mejorar la relación señal-ruido del sensor y posibilitar su uso con niveles de iluminación más bajos.

Desde su desarrollo, el HS se ha aplicado en numerosas áreas científicas, como la ya mencionada astronomía, la óptica atmosférica (Dayton et al. 1992, Silbaugh et al. 1996), la metrología óptica (Pfund et al. 1998a), como sensor de posiciones y desplazamientos (Ares et al. 2000) o en el estudio de láseres de alta potencia

(Schwiegerling y Neal 2005). Su éxito se debe a factores como su principio intuitivo, la posibilidad de trabajar tanto con luz coherente como incoherente, la aparición de las cámaras CCD o la disponibilidad actual de los elementos que lo componen, como sucede con las matrices de microlentes (Ares et al. 2000).

En el año 1994 el sensor fue aplicado por primera vez a la medida de las aberraciones oculares (Liang et al. 1994). La resolución espacial proporcionada por las microlentes empleadas permitió estimar las aberraciones de alto orden del ojo humano con precisión y rapidez. La introducción del HS también desembocó en el desarrollo del primer sistema de óptica adaptativa ocular, que corregía las aberraciones estáticas por medio de un espejo deformable controlado por actuadores piezoeléctricos (Liang et al. 1997). Con este montaje se consiguió mejorar la calidad óptica de ojos sanos con altos diámetros de pupila. Gracias a ello, se pudieron obtener imágenes de alta resolución de la retina de personas vivas, resolviendo células no distinguibles con las demás técnicas de imagen disponibles (Roorda y Williams 1999). En el año 2001, el uso de fuentes de baja coherencia y de técnicas de escaneo de la retina en un montaje de un HS permitió obtener por primera vez medidas de las aberraciones oculares a 25 Hz de frecuencia (Hofer et al. 2001a). Este hecho posibilitó a su vez la introducción de controladores de lazo cerrado en los sistemas de óptica adaptativa, capaces de compensar dinámicamente las fluctuaciones temporales de las aberraciones oculares, e incrementar de nuevo la calidad de imagen (Hofer et al. 2001b). Además, la óptica adaptativa se ha incorporado desde entonces a distintos instrumentos de imagen del fondo de ojo, lo que ha permitido aumentar la resolución de los mismos (Roorda et al. 2002, Hermann et al. 2004).

Se ha comprobado experimentalmente que las aberraciones estimadas con el HS en ojos humanos son consistentes con las obtenidas con otros sensores, como el SRR (“refractómetro espacialmente resuelto”) o el LRT (“trazado de rayos con láser”) (Moreno-Barriuso y Navarro 2000, Moreno-Barriuso et al. 2001b). Estos dos últimos sensores, basados en el test de Smirnov, usan el mismo principio que el HS para relacionar sus medidas experimentales con el gradiente del frente de ondas a estimar, razón por la que se pueden incluir en la categoría común de “sensores de gradiente del frente de ondas” (Bará 2007). En el LRT y el SRR las diferentes regiones espaciales de la pupila se muestrean de manera secuencial, frente a la medida en paralelo del HS, que le proporciona mayor rapidez aunque menor rango dinámico. Por otra parte, en el SRR y el LRT los gradientes de cada zona de la pupila se miden en el primer paso, esto es, con haces de luz que entran en el ojo, mientras que el HS mide las aberraciones

introducidas por el ojo en un haz emitido por una fuente puntual formada en la retina. Finalmente, a diferencia del HS y el LRT, el SRR es un procedimiento subjetivo, esto es, que requiere de la participación activa de la persona cuyo ojo se está midiendo.

Otra fuente de información acerca del comportamiento del HS en ojos *in vivo* procede de la comparación de las estimaciones de la calidad óptica del ojo obtenidas con este sensor con las estimadas mediante otros procedimientos. Así, se han comparado las MTFs (“funciones de transferencia de modulación”) calculadas a partir de las aberraciones del HS con las MTFs obtenidas con otros sistemas, como el doble paso (Liang y Williams 1997, Prieto et al. 2000). En particular, se encontraron pequeñas discrepancias entre los resultados obtenidos con los dos procedimientos: el HS predice una calidad óptica ligeramente superior. Los autores consideraron que estas discrepancias son razonables dadas las diferencias existentes entre los dispositivos, como la distinta resolución espacial, la diferente influencia del tiempo de integración en las medidas o que el HS no sea sensible al *scattering*, que sí mide el doble paso.

Este capítulo empieza con la presentación en la sección 2.1 del principio en el que se basan los sensores de gradiente: la ecuación de propagación del centroide de la irradiancia en un medio homogéneo. En la sección 2.2 este principio se particulariza para la configuración de un HS. En particular, tras presentar una descripción general de este sensor (apartado 2.2.1), se aplica la ecuación de propagación del centroide entre el plano en el que se sitúa la matriz de microlentes (conjugado a la pupila ocular) y el plano de medida, en el que se coloca una cámara a fin de medir la distribución de irradiancia (apartado 2.2.2). También se presentan otras expresiones alternativas para el modelo del sensor HS (apartado 2.2.3). En la sección 2.3 se comenta la estimación experimental de las posiciones de los centroides a partir de las imágenes de la cámara.

## 2.1 Ecuación de propagación del centroide de la irradiancia

El sensor empleado en esta tesis, el HS, se fundamenta en la ecuación de propagación del centroide de la irradiancia en medios homogéneos. Esta ecuación permite vincular el frente de ondas que incide sobre el plano de la pupila del sensor y la distribución de irradiancia originada en el plano de medida por la transformación y propagación de dicho frente. A partir de dicha relación teórica y de las imágenes capturadas por el sensor, es posible estimar el frente de ondas incidente con rapidez. Esta sección repasa el contenido de la ecuación de propagación del centroide de la

irradiancia y su derivación. En particular, a partir de la integral de difracción de Fresnel se encuentra que la propagación de dicho centroide se produce según una recta cuya pendiente está relacionada con el gradiente transversal del frente de ondas y con la distribución de irradiancia en el plano de partida (Teague 1982, Bará 2003).

Supóngase que, bajo la aproximación de Fresnel, una onda monocromática se propaga en un medio homogéneo y no absorbente en torno al eje  $z$ . La amplitud compleja de dicha onda en los planos  $\Sigma$  (situado en  $z=0$ ) y  $\Sigma'$  (en  $z=z'$ ) es:

$$u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp\{ik\Phi(\mathbf{r})\}; \quad u(\mathbf{r}') = A(\mathbf{r}') \exp\{ik\Phi(\mathbf{r}')\} \quad (2.1)$$

Estas funciones se definen de manera que las amplitudes  $A(\mathbf{r})$  sean reales. Por hipótesis, las distribuciones en ambos planos están ligadas por la integral de Fresnel:

$$u(\mathbf{r}') = \frac{1}{i\lambda z'} e^{ikz'} \int_{\Sigma} u(\mathbf{r}) \exp\left\{i \frac{k}{2z'} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2\right\} d^2\mathbf{r} \quad (2.2)$$

Se han de relacionar los centroides de las irradiancias en  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  a partir de la relación (2.2) entre las distribuciones de amplitud compleja. Los centroides se definen como:

$$\mathbf{c} = \frac{\int_{\Sigma} \mathbf{r} I(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}}{\int_{\Sigma} I(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{c}' = \frac{\int_{\Sigma'} \mathbf{r}' I(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}'}{\int_{\Sigma'} I(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}'} \quad (2.4)$$

Si el medio no tiene pérdidas, entonces la potencia total en ambos planos se mantiene constante. Por tanto, se puede establecer directamente que:

$$E = \int_{\Sigma} I(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \int_{\Sigma'} I(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' \quad (2.5)$$

La igualdad (2.5) se demuestra si se repiten con el denominador de (2.4) los pasos que se siguen a continuación con el numerador.

El punto de partida de las demostraciones de Teague y Bará reside en sustituir la ecuación de Fresnel dada por (2.2) en la expresión (2.4) del centroide en  $\Sigma'$  usando que  $I(\mathbf{r}') = |u(\mathbf{r}')|^2$ . Teague identifica la transformada de Fourier de la integral de Fresnel:

$$u(\mathbf{r}') = \frac{1}{i\lambda z'} e^{ikz'} e^{i\pi r'^2/(\lambda z')} \text{TF} \left[ e^{i\pi r^2/(\lambda z')} u(\mathbf{r}) \right]_{\mathbf{r}'/\lambda z'} \quad (2.6)$$

Si se sustituye (2.6) en (2.4) y se usan las propiedades de la transformada de Fourier:

$$\mathbf{c}' = \frac{1}{E} \int_{\Sigma} \mathbf{r} |u(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} - \frac{i}{E} \frac{z'}{k} \int_{\Sigma} u^*(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.7)$$



En esta expresión,  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  es el gradiente transversal. El primer sumando que queda en (2.7) es igual al centroide  $\mathbf{c}$  de la irradiancia en  $\Sigma$ , dado por (2.3). Para evaluar el segundo término en función de la amplitud y el frente de ondas en  $\Sigma$ , se sustituye el valor de  $u(\mathbf{r})$  dado por (2.1). Si se usa que el centroide  $\mathbf{c}'$  es una magnitud real:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + z' E^{-1} \int_{\Sigma} I(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} \quad (2.8)$$

Nótese que  $i(\mathbf{r}) \equiv E^{-1} I(\mathbf{r})$  es la irradiancia en  $\Sigma$  normalizada por la potencia. En consecuencia, esta expresión muestra que el centroide se propaga siguiendo una línea recta cuya pendiente es igual al promedio espacial del producto del gradiente del frente de ondas y de la distribución normalizada de irradiancia en el plano de partida. Este modelo permite la estimación del frente de ondas a partir del conocimiento de la dirección angular de propagación del centroide,  $(\mathbf{c}' - \mathbf{c})/z'$ . Este es el procedimiento usado para estimar el frente en el test clásico de Hartmann, como se señaló previamente.

Como se ha comentado, en su demostración Bará también sustituye la integral de Fresnel en la expresión (2.4) de  $\mathbf{c}'$ . Si se desarrolla el valor de  $|u(\mathbf{p}')|^2$  y se cambia el orden de integración, se obtiene la siguiente identidad:

$$\mathbf{c}' = \frac{1}{E} \frac{1}{(\lambda z')^2} \int_{\Sigma_1} \int_{\Sigma_2} d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 u(\mathbf{r}_1) u^*(\mathbf{r}_2) e^{ik/(2z')(r_1^2 - r_2^2)} \int_{\Sigma'} d^2 \mathbf{r}' \mathbf{r}' e^{-i(k/z')(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^T \mathbf{r}'} \quad (2.9)$$

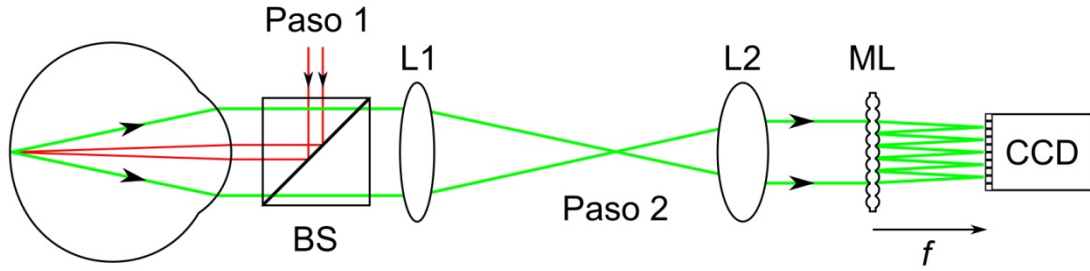
Las integrales de (2.9) se pueden evaluar usando diferentes propiedades de la delta de Dirac. Con este procedimiento, se vuelve a obtener la expresión (2.7).

## 2.2 Principio del sensor

### 2.2.1 Descripción del sensor

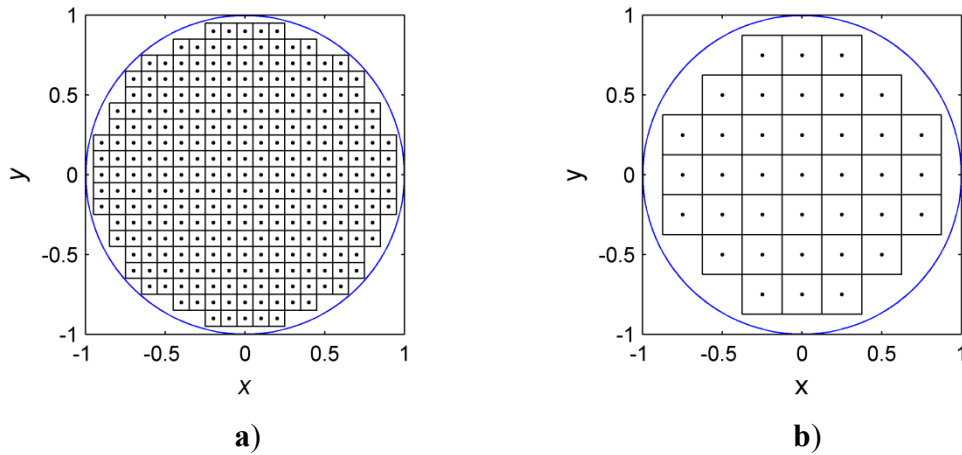
La figura 2.1 muestra el esquema de un sensor HS ocular. La imposibilidad de acceder a la retina *in vivo* hace necesario usar una configuración de doble paso. El primer paso (de iluminación) forma una imagen de la fuente en la retina. En el segundo paso (de medida), el frente de ondas del haz reflejado atraviesa la óptica no ideal del ojo. En consecuencia, el frente que emerge de la pupila ocular no es plano, sino que consta de un conjunto de distorsiones espaciales. Un sistema de lentes (que en la figura sigue una configuración telescópica) forma una imagen de la pupila ocular en el plano de una matriz de microlentes. Esta matriz muestrea espacialmente el frente de ondas (cf. la figura 2.2) y forma réplicas del objeto en retina en el plano de una cámara, situado habitualmente en la focal  $f$  de las microlentes. La desviación angular del centroide de

cada réplica respecto del centroide obtenido con una onda plana de referencia está relacionada con el gradiente local de las aberraciones oculares (cf. apartado 2.2.2).



**Figura 2.1:** Diagrama de un sensor HS. En el paso 1 un haz incide sobre el ojo y forma una imagen en la retina. En el paso 2 la luz reflejada sale fuera del ojo y atraviesa el divisor de haz (BS). El sistema de lentes L1 y L2 conjuga los planos de la pupila ocular y de la matriz de microlentes (ML). Cada microlente forma en el plano de la cámara una imagen del objeto en retina.

El papel del doble paso en aberrometría ocular ha sido estudiado (Artal et al. 1995, Diaz-Santana y Dainty 2001). Artal et al. hallaron que la PSF del doble paso es igual a la correlación espacial de las PSFs de los pasos individuales. Por tanto, el paso 1 aumenta el tamaño de los *spots* de la cámara, lo que incrementa el ruido de los centroides. No obstante, según Diaz-Santana y Dainty el *scattering* en retina elimina en la fase la información del paso 1 y hace que el frente del doble paso sea similar al del paso 2 en solitario, al menos para medidas en fovea con alto tiempo de exposición.



**Figura 2.2:** Dos patrones de microlentes de un HS. Constan de microlentes cuadradas, iguales, distribuidas en una red cuadrada y con factor de llenado unidad (lado igual al espaciado). Los ejes  $\{x, y\}$  están normalizados por el radio  $R_p$  de la pupila ocular (círculos). En a) el lado efectivo de las microlentes en la pupila ocular es  $d = 0.1 R_p$  y hay  $N=277$  subaperturas; en b),  $d=0.25 R_p$  y  $N=37$ .

### 2.2.2 Modelo teórico

En este apartado se usa la ecuación de propagación del centroide de la irradiancia para relacionar el frente de ondas ocular  $\Phi_e(\mathbf{r})$  con la distribución de irradiancia medida en el plano imagen de cada microlente de un HS. A diferencia de lo que ocurre con el test clásico de Hartmann, la expresión (2.8) no puede ser aplicada directamente al sensor, ya que esta ecuación describe la propagación en un medio homogéneo y  $\Phi_e(\mathbf{r})$  es el frente que incide sobre el plano de las microlentes: es necesario considerar el cambio de amplitud y de fase que introduce cada lente (Bará 2003). Considérese una de las microlentes del sensor, que se denota por el índice  $n$ . Sean  $A_n(\mathbf{r})$  y  $\Phi_n(\mathbf{r})$  la amplitud y el frente de ondas que emergen tras su subapertura. El vector  $\mathbf{r}_n$  da la posición del centro de la microlente en el plano  $\Sigma$ . Por  $T_n(\mathbf{r})$  se denota la función de transmitancia de la microlente, igual a 1 dentro de la subapertura y a 0 en el resto del plano  $\Sigma$ . Entonces, si la lente es esférica y con focal  $f$  (Goodman 1996: 99):

$$A_n(\mathbf{r}) = T_n(\mathbf{r}) A_e(\mathbf{r}); \quad \Phi_n(\mathbf{r}) = \Phi_e(\mathbf{r}) - \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|^2 / (2f) \quad (2.10)$$

La distribución de irradiancia normalizada tras cada microlente,  $i_n(\mathbf{r})$ , queda:

$$i_n(\mathbf{r}) = \frac{T_n(\mathbf{r}) A_e^2(\mathbf{r})}{\int_{\Sigma} T_n(\mathbf{r}) A_e^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}} = \frac{1}{E_n} T_n(\mathbf{r}) I_e(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Ahora la potencia que se conserva es la que atraviesa la apertura de la microlente:

$$E_n = \int_{\Sigma} T_n(\mathbf{r}) I_e(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \int_{\Sigma'} I(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

Para poder aplicar la ecuación (2.12), es necesario suponer que a cada subapertura  $n$  se le puede asociar una región del plano imagen  $\Sigma'$  en la que se concentra la distribución de irradiancia asociada a la misma y en la que no hay contribuciones significativas de la radiación que emerge de otras microlentes. Si se considera que las microlentes están limitadas por difracción, esta suposición es más acertada cuanto mayor sea su apertura numérica (Prieto et al. 2000). La suposición permite tratar a cada una de las subaperturas de manera individual. Por su parte, las integrales en  $\Sigma$  se pueden extender a todo el plano debido a que  $T_n(\mathbf{r})$  contiene la apertura finita de las microlentes.

Ahora se está en condiciones de aplicar la ecuación (2.8) entre el plano posterior de cada microlente y su plano imagen. Si  $\mathbf{c}'(\mathbf{r}_n)$  da la posición del centroide de la microlente  $n$  respecto al sistema de referencia usado:

$$\mathbf{c}'(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n = (1 - z'/f) \int_{\Sigma} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) i_n(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} + z' \int_{\Sigma} i_n(\mathbf{r}) \nabla \Phi_e(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.13)$$

Si se considera el plano focal de las microlentes, entonces  $z' = f$ . Por tanto, desaparece la dependencia con el centroide de la irradiancia en la subapertura de la microlente:

$$[\mathbf{c}'(\mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n]/f = \int_{\Sigma} i_n(\mathbf{r}) \nabla \Phi_e(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.14)$$

La igualdad (2.14) se ha obtenido aplicando la ecuación de propagación del centroide a la situación particular de un HS, en la que interesa relacionar el frente que incide sobre una microlente con la distribución de irradiancia en su plano focal. Existe otro procedimiento para llegar al mismo resultado que consiste en emplear desde el principio la configuración del sensor. Para ello, en la derivación de la sección 2.1 se supone la existencia de una microlente en el plano  $\Sigma$ . En consecuencia, en la distribución  $u(\mathbf{r})$  de (2.1) hay que realizar los cambios de amplitud y fase dados por (2.10). El resultado de estas modificaciones es que la fase introducida por la lente cancela el término cuadrático del interior de la integral de Fresnel en (2.6) (Goodman 1996: 103). Como consecuencia, la distribución de amplitud  $u_n(\mathbf{r}')$  en la focal de la lente es igual a la difracción de Fraunhofer de  $T_n(\mathbf{r})u_e(\mathbf{r})$ , donde  $u_e(\mathbf{r})$  es el campo que incide sobre la subapertura. Tras sustituir dicha expresión en la ecuación de  $\mathbf{c}'$ , se comprueba que se llega al mismo resultado (Tatarskii 1971: 288). Mahajan también deriva la ecuación (2.14) en el contexto de un sistema de imagen. En primer lugar, el autor determina que el centroide de la PSF viene dado por el gradiente de la parte imaginaria de la OTF en el origen. A continuación utiliza la expresión de la OTF como autocorrelación normalizada de la función pupila generalizada del sistema para relacionar el centroide con las funciones de transmisión y aberración (Mahajan 1985).

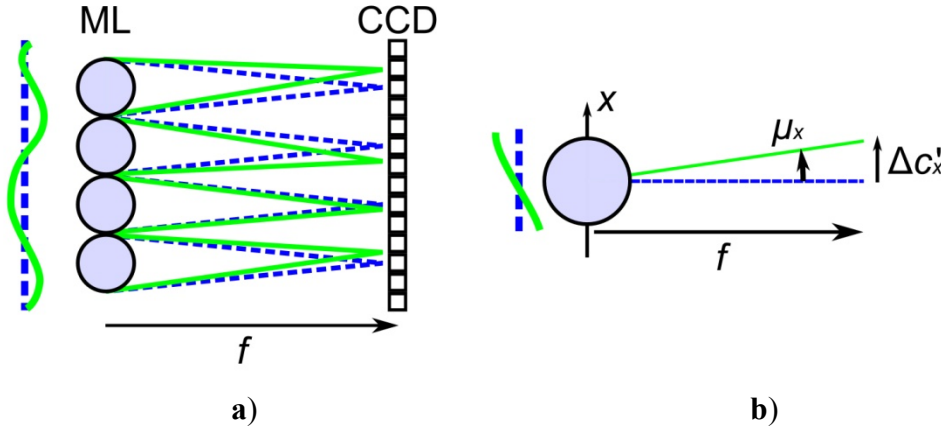
Los desplazamientos angulares de los centroides medidos por un sensor HS suelen estar referidos a las posiciones de los centroides obtenidas cuando se ilumina el sensor con una onda plana con irradiancia constante,  $\mathbf{c}'_R(\mathbf{r}_n)$ . A través de esta onda de referencia se pueden descontar las aberraciones residuales  $\Phi_R(\mathbf{r})$  introducidas por el propio sensor en el paso de medida, que de otra manera estarían incorrectamente atribuidas a  $\Phi_e(\mathbf{r})$ . Entre ellas destacan las de la propia matriz de microlentes. Si se denota  $\Delta\mathbf{c}'(\mathbf{r}_n) = \mathbf{c}'(\mathbf{r}_n) - \mathbf{c}'_R(\mathbf{r}_n)$  a los desplazamientos de los centroides, las desviaciones angulares  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n)$  provocadas por el frente ocular son:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = \Delta\mathbf{c}'(\mathbf{r}_n)/f = \int i_n(\mathbf{r}) \nabla \Phi_e(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} - \int i_R(\mathbf{r}) \nabla \Phi_R(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.15)$$

Como la irradiancia de la onda de referencia es constante,  $i_R(\mathbf{r}) = A_n^{-1}T_n(\mathbf{r})$ . Si  $i_n(\mathbf{r})$  es aproximadamente constante en todos los puntos de la subpupila durante el tiempo de medida, entonces  $i_n(\mathbf{r}) \cong i_R(\mathbf{r})$ . Por tanto, si  $W(\mathbf{r})$  es la función de aberración:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = \int i_n(\mathbf{r}) \nabla W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.16)$$

Para cada microlente, las magnitudes que se suelen medir experimentalmente son las componentes de  $\boldsymbol{\mu}$  a lo largo de dos direcciones ortogonales, que normalmente son las direcciones cartesianas  $x$  e  $y$  (véase la figura 2.3b):  $\mu_u, u = \{x, y\}$ .



**Figura 2.3:** a) Desplazamientos de los *spots* que el frente real introduce respecto de las posiciones de referencia; b) rectas a lo largo de las cuales se propagan los centroides de irradiancia asociados a cada frente de ondas en el plano  $XZ$ . Las líneas continuas se corresponden con el frente de ondas ocular, mientras que las discontinuas con el de referencia

En aberrometría ocular, el rango dinámico es un parámetro muy relevante de un sensor HS, sobre todo si se miden las aberraciones de ojos con la refracción sin corregir o con problemas de visión, o si se usan excentricidades elevadas. El rango dinámico está limitado por la superposición de los focos de diferentes microlentes. Si el algoritmo de estimación de los centroides asocia una región en la cámara a cada microlente, entonces se produce una primera limitación cuando uno de los centroides abandona su región. Supongamos que las microlentes son cuadradas con lado efectivo  $d$  en la pupila ocular y que cada centroide se estima en una ventana  $d \times d$ . Si  $w$  es la semianchura del *spot* de una de las microlentes, el gradiente máximo que se puede medir en ella es:

$$\mu_x^{\max} = f^{-1} (d/2 - w) \quad (2.17)$$

Si se supone que el error refractivo está representado por un error esférico equivalente (SRE), se puede comprobar que el gradiente máximo originado por esta aberración se produce para una lente próxima al borde de la pupila y es  $\mu_x^{\max} \cong \text{SRE } R_p$ . Por tanto, el rango dinámico del sensor, en términos del SRE del frente, se puede estimar con:

$$\text{SRE} = \pm (R_p f)^{-1} (d/2 - w) \quad (2.18)$$

Existen diferentes métodos en la literatura para aumentar el rango dinámico dado por estas expresiones (Leroux y Dainty 2009).

### 2.2.3 Expresiones alternativas y particularizaciones del modelo

En este apartado se presentan expresiones alternativas y particularizaciones del modelo de sensor. En primer lugar, nótese que la expresión (2.16) es lineal, pero que la integral espacial depende del gradiente de la función de aberración. Nos interesa manejar una integral que dependa directamente de la aberración, ya que nuestro objetivo es estudiar las relaciones entre las estadísticas de la aberración y de los centroides. Integrando por partes y usando que  $i_n(\mathbf{r}) = 0$  fuera de la subapertura (Wallner 1983):

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = -\int \nabla i_n(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.19)$$

Ocupémonos ahora de las distribuciones de irradiancia  $i_n(\mathbf{r})$ . Recuérdese que  $i_n(\mathbf{r}) = E_n^{-1} T_n(\mathbf{r}) I_e(\mathbf{r})$ , donde  $I_e(\mathbf{r})$  es la irradiancia que incide sobre las microlentes,  $T_n(\mathbf{r})$  es la transmitancia de la subpupila  $n$ -ésima y  $E_n$  es la potencia total que atraviesa la microlente. Habitualmente las subaperturas son cuadradas o circulares. En el primer caso, si los lados de todas las subpupilas son ortogonales a las componentes  $u = \{x, y\}$  de los desplazamientos de los centroides y  $d_n$  es el lado de cada microlente (Bará 2007):

$$i_n(\mathbf{r}) = \frac{I_e(\mathbf{r})}{E_n} \text{rect}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{d_n}\right) = \begin{cases} E_n^{-1} I_e(\mathbf{r}) & \text{para } |x - x_n|, |y - y_n| \leq d_n/2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.20)$$

En el segundo, si  $R_n$  es el radio de cada subpupila:

$$i_n(\mathbf{r}) = \frac{I_e(\mathbf{r})}{E_n} \text{circ}\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{R_n}\right) = \begin{cases} E_n^{-1} I_e(\mathbf{r}) & \text{para } \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\| \leq R_n \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (2.21)$$

Los factores principales que introducen variaciones espaciales en la irradiancia normalizada  $i_n(\mathbf{r})$  de cada subpupila son el *speckle* y el efecto Stiles-Crawford reflectométrico (RSCE). El primero aparece cuando se usan fuentes de alta coherencia debido a las inhomogeneidades de la retina. No sólo causa fuertes variaciones de irradiancia en el plano de la pupila ocular, sino que además introduce modulaciones aleatorias en la fase instantánea (Díaz-Santana y Dainty 2001) e irregularidades en los *spots* en retina. Este fenómeno se puede evitar, por ejemplo, usando fuentes de baja coherencia, prolongando el tiempo de exposición (para aprovechar la existencia de movimientos oculares) o utilizando técnicas de escaneo de la retina (Liang et al. 1994, Hofer et al. 2001a, Larichev et al. 2001). El RSCE es consecuencia de las propiedades de guiado de ondas de los conos de la retina. Al modelar el RSCE la distribución de

irradiancia en la pupila ocular se divide en dos componentes: una direccional, modelada por una gaussiana bidimensional y asociada al guiado, y otra componente uniforme, ligada a la difusión de la luz en otras regiones de la retina. El pico de la componente direccional muestra una fuerte variabilidad entre sujetos, lo que resulta un inconveniente a la hora de aplicar modelos del RSCE a ojos particulares (He et al. 1999). Recientemente se ha hallado que los sensores HS se pueden utilizar para estimar los parámetros del modelo gaussiano del RSCE (Gao et al. 2009).

Si se supone que las variaciones espaciales de  $I_e(\mathbf{r})$  en el interior de la subapertura  $n$  son despreciables, entonces  $i_n(\mathbf{r}) = A_n^{-1} T_n(\mathbf{r})$ , donde  $A_n$  es el área de cada subapertura. En estas circunstancias, las ecuaciones (2.20) y (2.21) se convierten en:

$$i_n^{\text{sq}}(\mathbf{r}) = d_n^{-2} \text{rect}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)/d_n] \quad (2.22)$$

$$i_n^{\text{cir}}(\mathbf{r}) = (\pi R_n^2)^{-1} \text{circ}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)/R_n] \quad (2.23)$$

Las derivadas de estas magnitudes también son de interés en aquellas situaciones en las que se utilice la integral (2.19). Para las subpupilas cuadradas (Silbaugh et al. 1996):

$$\begin{aligned} \nabla i_n^{\text{sq}}(\mathbf{r}) = d_n^{-2} \{ & \hat{\mathbf{x}} \text{rect}[(y - y_n)/d_n] [\delta(x - x_n + d_n/2) - \delta(x - x_n - d_n/2)] \\ & + \hat{\mathbf{y}} \text{rect}[(x - x_n)/d_n] [\delta(y - y_n + d_n/2) - \delta(y - y_n - d_n/2)] \} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por otra parte, para las subpupilas circulares, si  $\mathbf{r}_n = 0$  (Bará 2007):

$$\nabla i_n^{\text{cir}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\pi R_n^2} \delta(r - R_n) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\pi R_n^2} \delta(r - R_n) \left\{ \frac{x}{R_n} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y}{R_n} \hat{\mathbf{y}} \right\} \quad (2.25)$$

La suposición de irradiancia constante en cada subapertura también permite reescribir la expresión (2.16) como:

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = A_n^{-1} \int T_n(\mathbf{r}) \nabla W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.26)$$

Tras utilizar el teorema de Stokes, se llega a que (Mahajan 1985):

$$\mu_u(\mathbf{r}_n) = A_n^{-1} \oint_{C_n} W(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{u}}^T d\mathbf{r} \quad (2.27)$$

Esta expresión indica que la componente  $\mu_u(\mathbf{r}_n)$  es igual a la circulación del vector  $A_n^{-1} W(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{u}}$  a lo largo del contorno  $C_n$  que limita la subapertura en cuestión. Evidentemente, los bordes ortogonales a  $\hat{\mathbf{u}}$  no contribuyen a esta componente. Esta identidad implica que si la irradiancia es constante en cada subapertura, entonces los desplazamientos angulares de los centroides sólo son sensibles a los valores de  $W(\mathbf{r})$

en los bordes de las subaperturas. Se llega a la misma conclusión usando la ecuación (2.19) y expresiones particulares de  $i_n(\mathbf{r})$  como (2.22) o (2.23) (Bará 2007).

Si, además de irradiancia constante en cada subapertura, todas las microlentes del sensor son iguales, entonces las funciones  $i_n(\mathbf{r})$  sólo se diferencian por una traslación:  $i_n(\mathbf{r}) = i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$ . Si se emplea este hecho en la expresión (2.19):

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = -\int \nabla i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = -A^{-1} \int \nabla T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (2.28)$$

Las integrales de (2.28) son convoluciones, salvo por el hecho de que en un sensor experimental  $\mathbf{r}_n$  toma  $N$  valores discretos, donde  $N$  es el número de microlentes.

Aunque la ecuación (2.26) se emplea en algunos trabajos de aberrometría ocular (Prieto et al. 2000), el modelo de sensor más habitual en ese campo iguala el desplazamiento angular de los centroides con el gradiente de  $W(\mathbf{r})$  en el centro de cada microlente (Liang et al. 1994):

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n) = \nabla W(\mathbf{r}_n) \quad (2.29)$$

Esta identidad se puede justificar a partir de la relación entre la función de aberración y las aberraciones geométricas o de rayo (Born y Wolf 1999: 231). Según esta interpretación, el desplazamiento espacial  $\Delta \mathbf{c}'(\mathbf{r}_n)$  de los centroides serviría para estimar las aberraciones de rayo. A diferencia de (2.26) o de (2.28), este modelo ignora el tamaño finito de las subaperturas. Además, mientras que en las expresiones anteriores está plenamente justificado desde el punto teórico la utilización del centroide de la irradiancia, en (2.29) se plantea el problema de qué magnitud de los *spots* de las microlentes es la apropiada para estimar las posiciones de los rayos en el plano imagen. Los autores que emplean (2.29) también suelen utilizar el centroide debido a la robustez de esta métrica frente al ruido del sensor y a la resolución espacial que proporciona. Otra justificación de (2.29) consiste en suponer que las microlentes del HS son lo suficientemente pequeñas (o las variaciones espaciales del frente lo suficientemente suaves) como para que el error cometido al aproximar la función de aberración dentro de cada subapertura por un término de prisma, con gradiente constante, sea despreciable frente a otras incertidumbres (Primot 2003). Algunos autores señalan que el error cometido por el uso de la expresión (2.29) es reducido en aberrometría ocular para ojos normales (más sobre este particular en los capítulos 3 y 4) (He et al. 1998). No obstante, la complejidad introducida por el promedio espacial no siempre es excesiva, como muestran los múltiples trabajos de óptica atmosférica y astronómica que lo consideran.



En esta tesis se usa preferentemente la expresión (2.28) con el promedio espacial. Mientras no se explicita la dependencia  $i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)$  de las subpupilas, siempre se podrá transformar una expresión teórica a la correspondiente para el modelo (2.29) realizando la sustitución  $i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)$  (Bakut et al. 1994).

## 2.3 Estimación experimental de los centroides

En los sensores HS, la estimación de los desplazamientos angulares de los centroides está sometida a diferentes fuentes de incertidumbre. Por una parte, existen errores sistemáticos, ligados por ejemplo a la óptica del sistema (desalineamientos, determinación inexacta de parámetros como la focal de las microlentes, etc.). La magnitud de muchos de estos errores puede reducirse a niveles razonables mediante técnicas de calibración (Pfund et al. 1998b). Un segundo tipo son los errores aleatorios, que afectan a la precisión de las medidas. Algunas de estas fuentes de incertidumbre están ligadas a la naturaleza de la luz que incide sobre el sensor: el *speckle* o el ruido fotónico. Otras están relacionadas con los dispositivos de medida, como el ruido de lectura. Además, la magnitud final del ruido también depende de la técnica usada para estimar la posición del centroide a partir de las medidas de irradiancia.

En aberrometría ocular el ruido fotónico no tiene tanta importancia como en las aplicaciones astronómicas, por lo que se pueden emplear detectores con un mayor número de píxeles, como las cámaras CCD o CMOS. La mayor resolución reduce el error de muestreo de los *spots* (Cao y Yu 1994). Además, la estimación de cada centroide se realiza en una región finita del plano  $\Sigma'$ , a fin de sólo considerar el *spot* asociado a cada microlente y limitar los ruidos fotónico y de lectura. Este truncamiento, aunque necesario, introduce un sesgo en la estimación (Irwan y Lane 1999). Teniendo en cuenta tanto la discretización como el truncamiento, las componentes de cada centroide se estiman sustituyendo las integrales de (2.4) por sumas:

$$\hat{\mathbf{c}}'(\mathbf{r}_n) = \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{r}_p' d_p}{\sum_{p=1}^P d_p} = \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{r}_p' (t_p + v_p)}{\sum_{p=1}^P (t_p + v_p)} \quad (2.30)$$

En esta ecuación  $\hat{\mathbf{c}}'(\mathbf{r}_n)$  son las coordenadas estimadas del centroide de la subapertura  $n$ ,  $p$  es el índice de cada uno de los  $P$  píxeles de la región asociada con la microlente,  $\mathbf{r}_p'$  es el vector de posición de cada píxel y  $d_p$  es el número de fotoelectrones detectados por

píxel. La señal  $I_p$  es proporcional a la energía capturada en el área de cada píxel durante el tiempo de integración, mientras que las contribuciones de las fuentes aleatorias se recogen en el ruido aditivo  $v_p$ . Para el caso ocular, las más relevantes son el ruido fotónico y el ruido de lectura. El ruido fotónico se debe a que el número de fotones que inciden sobre cada píxel es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson. En consecuencia, su SNR depende de la raíz de la cantidad de fotones,  $I_p^{1/2}$ . El número de fotones se ve muy afectado por la anchura del *spot* en la microlente y, por tanto, por el tamaño de la fuente en retina. Este tamaño a su vez puede variar por factores como la acomodación o el diámetro del haz del paso 1 (Díaz-Santana 2000). El ruido de lectura, introducido por la electrónica del detector, es independiente de la señal de fotones. Su magnitud no depende de la anchura del *spot*, pero sí aumenta fuertemente con el número  $P$  de píxeles considerados (Cao y Yu 1994).

Otros factores a tener en cuenta son la presencia de irradiancia procedente de microlentes vecinas o la existencia de una componente de fondo. La segunda situación se produce en aberrometría ocular para medidas tomadas en el infrarrojo debido al *scattering* que se produce en regiones profundas de la retina y en la coroides (Llorente et al. 2003). El fondo sesga la expresión (2.30) hacia el centro de la región de cálculo si no se toman medidas, como la aplicación de un umbral (Leroux y Dainty 2010). En caso de ser pertinente, la influencia en  $I_p$  de factores como la eficiencia cuántica del detector, el ruido de cuantización o la respuesta no uniforme de los píxeles se puede recoger con un modelo apropiado de la cámara (Li et al. 2009).

De entre todos los algoritmos que se pueden utilizar para moderar el nivel de ruido resultante de implementar la ecuación (2.30), en esta tesis se usa la umbralización (Arines y Ares 2004). Sus ventajas son su simplicidad y la rapidez con la que se implementa. En este algoritmo sólo se utilizan los píxeles que superan un umbral  $t$ :

$$\hat{\mathbf{c}}'(\mathbf{r}_n) = \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{r}_p' T(d_p) d_p}{\sum_{p=1}^P T(d_p) d_p}; \quad \text{con } T(d_p) = \begin{cases} 1; & \text{si } d_p \geq t \\ 0; & \text{si } d_p < t \end{cases} \quad (2.31)$$

Una vez que se ha estimado la posición del centroide, su desplazamiento angular se calcula restando la posición de referencia y dividiendo por la distancia focal:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_n) \equiv \hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}_n) = \Delta \hat{\mathbf{c}}'(\mathbf{r}_n) / f \quad (2.32)$$

Esta expresión implica que en las microlentes con focal corta la incertidumbre de los desplazamientos angulares experimenta un mayor incremento debido a la propagación del error. No obstante, recuérdese que los sensores con mayor focal ven reducido su rango dinámico [cf. (2.17)]. Al trabajar con un HS es fundamental calibrar la distancia entre las microlentes y la cámara usando frentes de referencia (Pfund et al. 1998b).

### 2.3.1 Modelo de medida del Hartmann-Shack

En la sección 2.2 se discutió el principio del HS, que afirma que el desplazamiento angular  $\mu(\mathbf{r}_n)$  del centroide de la distribución de irradiancia asociada a cada microlente es igual al promedio espacial del gradiente de la aberración en la subapertura. Por otra parte, en esta sección 2.3 se ha comentado la estimación experimental del valor de este desplazamiento a partir de las imágenes capturadas por el sensor. La relación entre la magnitud teórica  $\mu(\mathbf{r}_n)$  y la experimental  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$  se suele establecer con el siguiente modelo de medida (Dai 1996, Diaz-Santana et al. 2005):

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_n) = \mu(\mathbf{r}_n) + \eta(\mathbf{r}_n) \quad (2.33)$$

Aquí  $\eta(\mathbf{r}_n)$  es el ruido resultante del proceso de determinación del centroide.

Como se menciona en el capítulo 1, el objetivo de la tesis es presentar métodos que permitan estudiar la estadística de la función de aberración a partir de la estadística de las medidas  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$  de un sensor HS. Por tanto, estamos especialmente interesados en estudiar el valor de los momentos estadísticos de las medidas  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$  y en las simplificaciones que se pueden realizar al respecto. Consideremos en primer lugar el valor esperado de la expresión (2.33). Gracias a la linealidad de dicho operador:

$$\langle \mathbf{m}(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \mu(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \eta(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (2.34)$$

El símbolo  $\langle \rangle$  denota promedio entre las diferentes medidas consideradas. Se pueden promediar tanto los datos correspondientes a ojos individuales como los correspondientes a poblaciones de ojos con ciertas características. Si se supone que el ruido no introduce sesgos (i. e., se desprecian las fuentes sistemáticas de error), su valor esperado es cero:  $\langle \eta(\mathbf{r}_n) \rangle = 0$  (Bará 2003). Por tanto:

$$\langle \mathbf{m}(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \mu(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (2.35)$$

Tratemos ahora los momentos de segundo orden. Las autocorrelaciones ( $u = v$  y  $n = t$ ) y correlaciones cruzadas (resto de casos) de las componentes de las medidas son:

$$\begin{aligned} \langle m_u(\mathbf{r}_n) m_v(\mathbf{r}_t) \rangle &= \langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \mu_v(\mathbf{r}_t) \rangle + \langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle \\ &+ \langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle + \langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \mu_v(\mathbf{r}_t) \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

En esta expresión,  $\{u, v\}$  toman los valores  $\{x, y\}$ , mientras que  $\{n, t\}$  pueden ser  $\{1, \dots, N\}$ . Ocupémonos en primer lugar de la correlación cruzada entre las medidas teóricas y el ruido. Usando el modelo de sensor (2.19) y suponiendo que la distribución de irradiancia en pupila no es un proceso aleatorio (i. e., se descarta la presencia de niveles significativos de *speckle*), se encuentra que:

$$\langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = - \int \frac{\partial}{\partial u} i_n(\mathbf{r}) \langle W(\mathbf{r}) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle d^2\mathbf{r} \quad (2.37)$$

Suponer no correlación entre aberraciones y ruido es razonable cuando las variaciones de las aberraciones no son muy elevadas, de modo que no deformen significativamente los *spots*. Es posible que en óptica ocular esta suposición no siempre sea adecuada (Díaz-Santana et al. 2005). Si se cumple, como el valor medio del ruido es cero:

$$\langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = \langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle \langle \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = 0 \quad (2.38)$$

Por lo que respecta a las correlaciones del ruido, es frecuente suponer que sus componentes en diferentes microlentes ( $n \neq t$ ) no están correlacionadas (nótese que, por ejemplo, tanto el ruido fotónico como el electrónico no están correlacionados en píxeles diferentes). También se supone no correlación entre las componentes ortogonales del ruido en una misma microlente. Con estas suposiciones:

$$\langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = \sigma_{\eta_u}^2(\mathbf{r}_n) \delta_{u,v} \delta_{n,t} \quad (2.39)$$

Se pueden aplicar dos condiciones más. La primera es suponer que las varianzas de cada componente  $\{u, v\}$  son iguales en todas las microlentes. La segunda consiste en que, además, las varianzas de las componentes ortogonales son iguales. Con ellas:

$$\langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = \sigma_{\eta}^2 \delta_{u,v} \delta_{n,t} \quad (2.40)$$

En el caso ocular, estas suposiciones pueden no ser razonables en presencia de *spots* alargados, cuya asimetría en ocasiones puede variar fuertemente en la pupila. Además, es necesario que el nivel de irradiancia sea similar en toda la pupila.

La magnitud de la contribución de ruido en sensores experimentales se puede estimar realizando medidas de las fluctuaciones de los centroides con ojos artificiales, formados por ejemplo por láminas de fase y retinas difusoras, que tengan niveles de irradiancia y tamaños de *spots* similares a los observados en el caso de ojos reales.

## Capítulo 3

# ESTADÍSTICA ESPACIAL Y ESTIMACIÓN DE LA ABERRACIÓN

En este capítulo se revisan algunos de los métodos que se emplean en la literatura para representar a la función de aberración y su estadística espacial de primer y segundo orden. También se repasan los procedimientos usados habitualmente en aberrometría ocular para estimar los valores de las aberraciones a partir de las medidas obtenidas por sensores de frente de onda de gradiente y, en particular, por el sensor HS. El objetivo último del capítulo consiste en presentar una serie de problemas para cuya resolución es necesario disponer de un modelo de la estadística espacial de la población de funciones de aberración que se considere. Se trata, por tanto, de motivar el interés que tiene el estudio de dicha estadística en el campo de la aberrometría ocular, donde todavía no se dispone de modelos de estas características desarrollados a partir de primeros principios y que hayan mostrado su validez experimental. Esta carencia impide evaluar muchas de las expresiones que se presentan en este capítulo para el caso ocular. Para suplir en parte este problema, se realizan continuas referencias al caso de la turbulencia atmosférica. En ese campo sí se dispone de modelos teóricos (de Kolmogorov o de Von Kármán), que describen las perturbaciones aleatorias de fase introducidas por la atmósfera en sistemas ópticos que la usan como medio de propagación. De hecho, los métodos propuestos en el capítulo 5 para contrastar la validez de modelos de la estadística del frente de ondas se inspiran en trabajos realizados en óptica atmosférica y astronómica.

La sección 3.1 comienza con la presentación de las diferentes magnitudes que se pueden utilizar para describir el frente de ondas o su estadística espacial. Se distinguen dos situaciones, en función de que se trabaje directamente con la función de aberración (apartado 3.1.1) o con una representación modal de la misma (apartado 3.1.2). A continuación se presentan algunas de las ventajas inmediatas que posee el conocimiento

de la estadística espacial del frente, como la determinación de las funciones de Karhunen-Loève o la generación de realizaciones de la función de aberración (apartado 3.1.3). Para terminar la sección, se presenta el modelo de Kolmogorov de la turbulencia atmosférica para mostrar ejemplos de las magnitudes estadísticas y de los métodos presentados (apartado 3.1.4). En la sección 3.2 se discute el procedimiento de estimación modal de las aberraciones, el más empleado en aberrometría ocular. El punto de partida del mismo es la relación teórica lineal entre las medidas proporcionadas por un sensor de gradiente y la función de aberración, revisada en el capítulo 2. Se comenta sobre todo el procedimiento habitual de mínimos cuadrados (apartado 3.2.1), aunque también se hace referencia a otros métodos que permitirían mejorar la calidad de la estimación en caso de que se dispusiese de información acerca de la estadística de la función de aberración y del ruido (apartado 3.2.2). En la sección 3.3 se presentan métodos para evaluar las estimaciones, que se particularizan en la medida de lo posible para la estimación por mínimos cuadrados. El énfasis en esta sección se pone en los errores de estimación y en las alteraciones que sensor y estimación introducen en la estadística de las aberraciones (apartados 3.3.1 y 3.3.2). La cuantificación de estos errores es otra de las posibilidades que ofrece el conocimiento de la estadística de las aberraciones. También es posible encontrar los parámetros de la red de muestreo del sensor o del método de estimación que minimizan el error de estimación para una población de funciones de aberración dada.

### 3.1 Descripción de la estadística espacial del frente de ondas

En esta sección se definen y se comentan las principales propiedades de las magnitudes que se suelen utilizar para describir la estadística espacial de la función de aberración. Muchos métodos de estimación susceptibles de ser usados en los sensores de frente de ondas pueden introducir por medio de estas magnitudes información *a priori* acerca de la estadística del frente, lo que mejora la calidad de la reconstrucción.

Para introducir la aleatoriedad en la representación de la función de aberración  $W(\mathbf{r})$ , es necesario considerar que dicha función no es determinista. En su lugar, ha de suponerse que se trata de un proceso aleatorio, en este caso espacial. Esto quiere decir que para cada “experimento”, identificado por medio de un índice  $k$ , dicha función espacial toma un valor aleatorio diferente, denominado “realización” o “función muestra”. Cada realización se denota como  $W^{(k)}(\mathbf{r})$ . Para el caso de la aberrometría

ocular, los experimentos se pueden corresponder: a) con diferentes instantes de tiempo  $t_k$  en los que se van midiendo los cambios en la función de aberración de un mismo ojo, b) con las medidas realizadas para los diferentes ojos  $k$  pertenecientes a una población con determinadas características, o c) con una mezcla de las situaciones anteriores.

En esta sección se introducen magnitudes que pueden ser usadas para caracterizar la estadística de primer y segundo orden del proceso  $W(\mathbf{r})$ , es decir, para estudiar las funciones de densidad de probabilidad  $p(W; \mathbf{r})$  y  $p(W_1, W_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  (Goodman 2000). La primera se refiere a la probabilidad de que en el punto  $\mathbf{r}$  el proceso aleatorio tome el valor  $W$ . La segunda a la probabilidad de que en los puntos  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  el proceso tome los valores  $W_1, W_2$  de manera “conjunta” (esto es, en el mismo instante de tiempo o en el mismo ojo). La descripción de estas funciones de densidad se realiza con los correspondientes momentos estadísticos (valor medio y función de autocorrelación) y otras magnitudes asociadas.

Se distinguen dos modos de descripción de las aberraciones, dependiendo de que cada realización del frente de ondas se represente directamente mediante la función continua  $W(\mathbf{r})$  o de que se utilice una representación modal (de aquí en adelante se prescinde del superíndice  $k$  para referirse a cada realización). En esta tesis se favorece la primera opción. No obstante, se verá que ello no es impedimento para que, en caso de ser de interés, se pueda pasar de una representación a otra.

### 3.1.1 Representación directa del frente de ondas

Como se ha comentado, la estadística espacial del frente de ondas  $W(\mathbf{r})$  puede describirse por medio de los momentos estadísticos de dicho proceso aleatorio. Los momentos de primer y segundo orden son el valor esperado  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle$  y la función de autocorrelación  $C_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle W(\mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_2) \rangle$ , respectivamente. En estas definiciones, el símbolo  $\langle \rangle$  denota el promedio entre el conjunto de todas las realizaciones del frente. Como se ha comentado, dichas realizaciones pueden corresponderse con medidas tomadas en diferentes instantes temporales para un mismo ojo o con medidas tomadas para cada uno de los ojos de una población. La expresión de estos momentos es:

$$\begin{aligned} \langle W(\mathbf{r}) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} W p(W, \mathbf{r}) dW \\ \langle W(\mathbf{r}_1)W(\mathbf{r}_2) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_1 W_2 p(W_1, W_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) dW_1 dW_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Estas expresiones muestran explícitamente la relación entre los momentos y las correspondientes funciones de densidad de probabilidad de primer y segundo orden. Otra magnitud de interés es la función de autocovarianza, que es el momento de segundo orden centrado:  $B_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [W(\mathbf{r}_1) - \langle W(\mathbf{r}_1) \rangle][W(\mathbf{r}_2) - \langle W(\mathbf{r}_2) \rangle] \rangle$ . En el caso particular  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ , la autocovarianza es igual a la varianza del frente,  $\sigma_W^2(\mathbf{r})$ .

La función de estructura, estrechamente ligada a la función de autocorrelación, es otra magnitud de segundo orden que estará muy presente en este trabajo:

$$D_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [W(\mathbf{r}_1) - W(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle \quad (3.2)$$

Como se ve, el valor de esta función en cada par de puntos  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  de la pupila es igual al valor esperado de la diferencia cuadrática de los valores del frente en dichos puntos. Esta función es insensible a un término constante de fase (es decir, al modo de pistón) y ha sido muy utilizada en óptica atmosférica y astronomía (Roggemann y Welsh 1996). Su relación con la autocorrelación es:

$$D_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) + C_W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) - 2C_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.3)$$

La homogeneidad y la isotropía son dos propiedades importantes que pueden estar presentes en un proceso aleatorio espacial. Se dice que  $W(\mathbf{r})$  es un proceso homogéneo “en sentido amplio” si su valor esperado es independiente de la posición  $\mathbf{r}$  en el plano de pupila y si su función de autocorrelación sólo depende del vector  $\mathbf{p} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  que une cada par de puntos considerados. Si, además, la autocorrelación sólo depende de la distancia  $p = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$  entre las posiciones en pupila, entonces el proceso es isótropo.

Aplicando la definición, la función de estructura de un proceso homogéneo es:

$$D_W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 2[\langle W^2 \rangle - C_W(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \quad (3.4)$$

Por tanto, se obtiene la misma dependencia con  $\mathbf{p}$  que para la función de autocorrelación. No obstante, una de las principales ventajas de la función de estructura es que puede depender de  $\mathbf{p}$  incluso cuando el proceso aleatorio no es homogéneo (Goodman 2000: 79).

Otra magnitud de interés de  $W(\mathbf{r})$  es su espectro de potencias bidimensional:

$$F_W(\mathbf{v}) = \lim_{R \rightarrow \infty} (\pi R^2)^{-1} \langle |\text{TF}[\text{circ}(\mathbf{r}/R)W(\mathbf{r})]|^2 \rangle \quad (3.5)$$

Aquí  $\mathbf{v} = [\nu_x, \nu_y]^T$  es la frecuencia espacial. Si las aberraciones son homogéneas, el espectro de potencias es igual a la transformada de Fourier de su función de



autocorrelación, resultado que se conoce como el teorema de Wiener-Khinchin (Barrett y Myers 2004: 392):

$$F_W(\mathbf{v}) = \int C_W(\mathbf{p}) \exp(-i2\pi\mathbf{v}^T\mathbf{p}) d^2\mathbf{p} \quad (3.6)$$

Aplicando (3.4) en la transformada inversa de la expresión (3.6) y usando que el espectro de potencias es una función par, se obtiene que la función de estructura está relacionada con el espectro de potencias según:

$$D_W(\mathbf{p}) = 2 \int [1 - \cos(2\pi\mathbf{p}^T\mathbf{v})] F_W(\mathbf{v}) d^2\mathbf{v} \quad (3.7)$$

En aberrometría ocular, las poblaciones de frentes de onda pueden tener un valor esperado  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$ , lo que hace que la propuesta de modelos homogéneos para  $W(\mathbf{r})$  no sea razonable. Esta situación no se produce en óptica atmosférica, donde estos promedios sí que son iguales a cero. No obstante, en el caso ocular se pueden realizar propuestas de modelos homogéneos para las variaciones del frente respecto al valor esperado en cada punto  $\mathbf{r}$ ,  $\tilde{W}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - \langle W(\mathbf{r}) \rangle$  (Papoulis 1991: 302). Nótese que:

$$B_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_{\tilde{W}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Representación modal del frente

Para interpretar una función de aberración  $W(\mathbf{r})$  resulta útil descomponerla como la suma de una serie de funciones base  $f_i(\mathbf{r})$  tales que:

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

Aunque para que esta representación sea exacta se necesite un número infinito de funciones, con frecuencia el frente se aproxima por un número finito de ellas. Si se emplea una representación de este tipo, el estudio de la estadística del proceso  $W(\mathbf{r})$  puede sustituirse por el estudio de la estadística del vector aleatorio de coeficientes  $\mathbf{a}$ .

Las funciones base más utilizadas en aberrometría ocular son los polinomios de Zernike,  $Z_i(\mathbf{r})$ . Estos polinomios suelen definirse usando las coordenadas polares  $\mathbf{p} = \mathbf{r}/R_p = [\rho, \theta]$  de un disco de radio unidad, en el que son ortonormales. Según la convención más empleada en óptica ocular, se definen como (Thibos et al. 2002a):

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^{|m|} R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta) & m \geq 0 \\ -N_n^{|m|} R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta) & m < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Por tanto, los Zernikes son funciones separables en coordenadas radiales y angulares. El número entero  $m$  representa la frecuencia del término angular, mientras que el número natural  $n$  es el orden del polinomio radial  $R_n^{|m|}(\rho)$ , dado por:

$$R_n^{|m|}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [0.5(n+|m|)-s]! [0.5(n-|m|)-s]!} \rho^{n-2s} \quad (3.11)$$

Para un valor de  $n$  dado,  $m$  puede tomar los valores  $m = -n, -n+2, \dots, n-2, n$ . Además:

$$N_n^{|m|} = \sqrt{(2 - \delta_{m,0})(n+1)} \quad (3.12)$$

Con estas definiciones, la relación de ortonormalidad en el disco unidad queda:

$$\int \Pi(\mathbf{p}) Z_i(\mathbf{p}) Z_j(\mathbf{p}) d^2 \mathbf{p} = \delta_{i,j} \quad (3.13)$$

En esta ecuación,  $\Pi(\mathbf{p}) = \pi^{-1} \text{circ}(\mathbf{r}/R_p) = \Pi(\mathbf{r}/R_p)$ .

La descomposición modal (3.9) del frente en polinomios de Zernike queda:

$$W(\mathbf{r}) = W(R_p \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{p}) \quad (3.14)$$

En este desarrollo se ha omitido deliberadamente el término de fase constante o modo de pistón,  $i = 0$ , que no puede ser medido por los sensores de gradiente. El índice  $i$  correspondiente a cada modo  $(n, m)$  se determina en el convenio de acuerdo con:

$$i = [n(n+2) + m]/2 \quad (3.15)$$

Gracias a la ortogonalidad de los polinomios, los coeficientes del desarrollo se hallan proyectando el frente de ondas sobre cada polinomio (Roggemann y Welsh 1996: 95):

$$a_i = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) Z_i(\mathbf{r}/R_p) W(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = \int \Pi(\mathbf{p}) Z_i(\mathbf{p}) W(R_p \mathbf{p}) d^2 \mathbf{p} \quad (3.16)$$

Los momentos de primer orden del vector de coeficientes  $\mathbf{a}$  vienen dados por los valores esperados de cada una de sus componentes. De acuerdo con (3.16), si se usa la linealidad del operador valor esperado (Roggemann y Welsh 1996: 93):

$$\langle a_i \rangle = \int \Pi(\mathbf{p}) Z_i(\mathbf{p}) \langle W(R_p \mathbf{p}) \rangle d^2 \mathbf{p} \quad (3.17)$$

Esta expresión permite obtener los momentos de primer orden del vector de coeficientes a partir del valor esperado del frente de ondas.

Los momentos de segundo orden están recogidos en la matriz de autocorrelación,  $\mathbf{C}_a$ , o en la de autocovarianza,  $\mathbf{B}_a$ . Cada una de ellas se define de acuerdo con:

$$\mathbf{C}_a = \langle \mathbf{a} \mathbf{a}^T \rangle \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B}_a = \langle [\mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle][\mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle]^T \rangle = \mathbf{C}_a - \langle \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{a} \rangle^T \quad (3.19)$$

De manera similar a (3.17), los elementos de  $\mathbf{C}_a$  (o de  $\mathbf{B}_a$ ) están relacionados con la función de autocorrelación del frente a través de (Noll 1976):

$$(\mathbf{C}_a)_{i,j} = \langle a_i a_j \rangle = \iint \Pi(\mathbf{p}_1) \Pi(\mathbf{p}_2) Z_i(\mathbf{p}_1) Z_j(\mathbf{p}_2) C_W(R_p \mathbf{p}_1, R_p \mathbf{p}_2) d^2 \mathbf{p}_1 d^2 \mathbf{p}_2 \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{B}_a)_{i,j} = \iint \Pi(\mathbf{p}_1) \Pi(\mathbf{p}_2) Z_i(\mathbf{p}_1) Z_j(\mathbf{p}_2) C_{\tilde{W}}(R_p \mathbf{p}_1, R_p \mathbf{p}_2) d^2 \mathbf{p}_1 d^2 \mathbf{p}_2 \quad (3.21)$$

Para el caso en el que el frente de ondas es homogéneo, los elementos de la matriz de correlación también se pueden expresar en términos del espectro de potencias. En particular, usando (3.6) se puede demostrar que (Noll 1976):

$$\langle a_i a_j \rangle = \frac{1}{R_p^2} \int Q_i^*(\mathbf{f}) F_W(\mathbf{f}/R_p) Q_j(\mathbf{f}) d^2 \mathbf{f} \quad (3.22)$$

En esta identidad,  $\mathbf{f}$  es una frecuencia adimensional, definida como  $\mathbf{f} = R_p \mathbf{v}$ , y  $Q_i(\mathbf{f})$  es la transformada de Fourier del polinomio  $i$ -ésimo de Zernike:

$$Q_i(\mathbf{f}) = \int \Pi(\mathbf{p}) Z_i(\mathbf{p}) \exp(-i 2\pi \mathbf{f}^T \mathbf{p}) d^2 \mathbf{p} \quad (3.23)$$

Estas transformadas son iguales a funciones de Bessel de primera especie multiplicadas por el mismo término angular que en los Zernikes:

$$Q_n^m(f, \phi) = N_n^m (-i)^m (-1)^{(n-m)/2} \frac{J_{n+1}(2\pi f)}{\pi f} \begin{cases} \cos(m\phi) & m \geq 0 \\ -\sin(m\phi) & m < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

En caso de que el frente de ondas sólo sea homogéneo tras restarle el valor medio en cada posición, a partir de (3.21) se obtiene que:

$$(\mathbf{B}_a)_{i,j} = \frac{1}{R_p^2} \int Q_i^*(\mathbf{f}) F_{\tilde{W}}(\mathbf{f}/R_p) Q_j(\mathbf{f}) d^2 \mathbf{f} \quad (3.25)$$

La principal conclusión a extraer a partir de ecuaciones como (3.25) es que aunque se trabaje con las magnitudes estadísticas de la representación directa de la función de aberración, como sucede en esta tesis, las correspondientes magnitudes de una representación modal se pueden calcular utilizando estas expresiones (u otras equivalentes). En nuestro caso, obtener una representación modal de una propuesta de estadística será de interés una vez esta haya mostrado una buena compatibilidad con los resultados experimentales, lo que se puede comprobar utilizando los métodos propuestos en el capítulo 5.

Existe una variable muy utilizada para cuantificar la magnitud de las aberraciones de realizaciones individuales. Se define como el promedio espacial del valor cuadrático de la función de aberración:

$$\|W(\mathbf{r})\|^2 = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) W^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \int \Pi(\boldsymbol{\rho}) W^2(R_p \boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho} \quad (3.26)$$

Esta magnitud representa la norma al cuadrado de  $W(\mathbf{r})$  asociada al producto escalar definido en (3.13). Gracias a la ortogonalidad de los Zernikes, se puede demostrar que:

$$\|W(\mathbf{r})\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \quad (3.27)$$

Para el caso de poblaciones de funciones de aberración, una variable que se puede utilizar para caracterizar su magnitud es  $\langle \|W(\mathbf{r})\|^2 \rangle$ . A partir de (3.27):

$$\langle \|W(\mathbf{r})\|^2 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle a_i^2 \rangle \quad (3.28)$$

En muchas fuentes a  $\|W(\mathbf{r})\|^2$  se le denomina la varianza de las aberraciones. En esta tesis se evitará esta denominación a fin de evitar la confusión de esta variable con la función  $\sigma_W^2(\mathbf{r})$ , prefiriéndose la de norma al cuadrado de la aberración (o promedio espacial del error cuadrático del frente). En general:

$$\langle \|W(\mathbf{r}) - \langle W(\mathbf{r}) \rangle\|^2 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{a_i}^2 = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \sigma_W^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \quad (3.29)$$

Si  $\langle W \rangle = 0$ , entonces  $\langle \|W(\mathbf{r})\|^2 \rangle$  es igual al promedio espacial de la varianza. Si, además,  $W(\mathbf{r})$  es homogéneo, entonces  $\langle \|W(\mathbf{r})\|^2 \rangle = \sigma_W^2$ . A pesar de estas relaciones, en algunos estudios de aberrometría ocular se opta por promediar  $\|W(\mathbf{r})\|$ .

### 3.1.3 Ventajas del conocimiento de la estadística de las aberraciones

En este apartado se citan algunos de los problemas que se pueden abordar a partir del conocimiento de la estadística espacial de las aberraciones. Las ventajas relacionadas con la estimación de las aberraciones, como la determinación de la configuración óptima de un sensor, se comentarán en la sección 3.3, después de estudiar dicho proceso con cierto detalle. Por otra parte, los aspectos relacionados directamente con la aberrometría ocular se relegan al capítulo 4.

Una de las aplicaciones más inmediatas del conocimiento de la estadística de segundo orden de  $W(\mathbf{r})$  es la determinación de las funciones de Karhunen-Loève (KL). Para introducir estas funciones, es útil considerar un desarrollo modal aproximado  $W_a(\mathbf{r})$  de la aberración formado por  $M'$  términos:

$$W(\mathbf{r}) \cong W_a(R_p \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^{M'} b_i f_i(\mathbf{p}) \quad (3.30)$$

Las funciones de KL son aquellas que consiguen que la matriz de covarianzas de los coeficientes de este desarrollo sea diagonal, i. e.,  $\mathbf{B}_b = \mathbf{D}$ . El valor de estas funciones varía dependiendo de la estadística del frente y del número  $M'$  de términos considerados. La obtención de las funciones de KL ha sido descrita en detalle en la literatura. Por ejemplo, a partir de  $\mathbf{B}_a$  los valores de las funciones se pueden obtener como combinaciones lineales de polinomios de Zernike (Rodier 1990).

La principal ventaja de las funciones de KL es que son el conjunto de funciones ortonormales que representa de manera más eficiente a la función de aberración real, en el sentido de que minimizan el siguiente error de representación para un valor de  $M'$  dado (Barrett y Myers 2004: 288):

$$\Delta_{M'} = \left\langle \left\| W(R_p \mathbf{p}) - W_a(R_p \mathbf{p}) \right\|^2 \right\rangle = \int \Pi(\mathbf{p}) \left\langle \left[ W(R_p \mathbf{p}) - \sum_{i=0}^{M'} b_i f_i(\mathbf{p}) \right]^2 \right\rangle d^2 \mathbf{p} \quad (3.31)$$

Nótese que para funciones ortogonales se cumple que (Roggemann y Welsh 1996: 94):

$$\Delta_{M'} = \int \Pi(\mathbf{p}) \left\langle W^2(R_p \mathbf{p}) \right\rangle d^2 \mathbf{p} - \sum_{i=0}^{M'} \langle b_i^2 \rangle \quad (3.32)$$

La magnitud  $\Delta_{M'}$  se puede interpretar también como el promedio espacial del valor cuadrático medio de la aberración residual cuando en un sistema de óptica adaptativa se corrigen de manera ideal los  $M'$  primeros modos de la función de aberración.

Otra de las utilidades de la estadística espacial consiste en la posibilidad de generar realizaciones aleatorias  $W^{(k)}(\mathbf{r})$  de la aberración para su uso en diversas simulaciones. El objetivo a cumplir es que las funciones generadas (asociadas bien a diferentes instantes de tiempo  $t_k$  o al ojo  $k$ -ésimo de una determinada muestra) sigan la estadística del proceso real. Si se consideran los momentos de primer y segundo orden, entonces se desea que para un número  $K$  de realizaciones lo suficientemente elevado las funciones generadas cumplan que (Roggemann y Welsh 1996: 105):

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K W^{(k)}(\mathbf{r}) \cong \langle W(\mathbf{r}) \rangle; \quad \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K W^{(k)}(\mathbf{r}_1) W^{(k)}(\mathbf{r}_2) \cong C_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.33)$$

Existen también procedimientos modales que, en lugar de generar funciones continuas, producen vectores  $M'$ -dimensionales  $\mathbf{a}^{(k)}$ . En esta situación, nos interesa que la muestra de  $K$  vectores aleatorios generados tenga un valor medio y una matriz de correlaciones (o covarianzas) lo más próximos posibles a los primeros  $M'$  elementos del

vector real de dimensiones infinitas  $\langle \mathbf{a} \rangle$  y al primer bloque  $M' \times M'$  de  $\mathbf{C}_a$ , respectivamente.

### 3.1.4 Ejemplo: modelo de Kolmogorov de la turbulencia atmosférica

El modelo de Kolmogorov describe los cambios aleatorios de índice de refracción introducidos en la atmósfera por la acción del viento (Roggemann y Welsh 1996, Goodman 2000). Este agente actúa sobre las variaciones a gran escala del índice originadas por el calentamiento desigual de la superficie terrestre y las divide en inhomogeneidades cada vez más pequeñas. El modelo de Kolmogorov, basado en la mecánica de fluidos, predice la existencia de un rango de escalas espaciales, el rango inercial, en el que dichas fluctuaciones de índice son homogéneas e isotrópicas. En particular, se encuentra que la densidad espectral del índice de refracción es:

$$\Phi_n(\mathbf{k}) = 0.033 C_n^2 k^{-11/3} \quad (3.34)$$

En esta expresión,  $\Phi$  es el espectro de potencias tridimensional,  $n$  son las fluctuaciones del índice de refracción,  $\mathbf{k}$  es vector de números de onda en el espacio tridimensional,  $k$  es su módulo (en rad/unidad de longitud) y  $C_n^2$  es una constante que mide la fuerza de las fluctuaciones y que depende de la altura respecto a la superficie terrestre.

A partir del trabajo de Kolmogorov, otros autores como Tatarskii y Fried se dedicaron a estudiar el efecto que la aleatoriedad de un medio de este tipo introduce en sistemas ópticos que lo utilicen como medio de propagación. En particular, encontraron que la fase (o la aberración) en la pupila del sistema óptico es un proceso aleatorio homogéneo, isotrópico y gaussiano. Su valor esperado es igual a cero,  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle = 0$ , mientras que su función de estructura y su espectro de potencias son iguales a:

$$D_W(\mathbf{p}) = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 6.88 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{5/3} \quad (3.35)$$

$$F_W(\mathbf{v}) = \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{0.023}{p_0^{5/3}} \right) v^{-11/3} \quad (3.36)$$

La magnitud  $p_0$  es una variable con dimensiones de longitud conocida como el parámetro de Fried. Da el diámetro de pupila  $D_p$  a partir del cual la calidad de imagen no mejora significativamente con el aumento del tamaño de la apertura, debido a que la turbulencia domina sobre la difracción. En (3.36)  $v$  está en ciclos/unidad de longitud.

Noll halló las expresiones de los elementos de la matriz de autocovarianza  $\mathbf{B}_a$  de los coeficientes de Zernike bajo el modelo de Kolmogorov (Noll 1976). Para ello,

sustituyó la ecuación (3.36) del espectro de potencias y las expresiones de las transformadas de Fourier de los polinomios de Zernike, que el mismo derivó, en la ecuación (3.25). Como el valor esperado del frente para este modelo es igual a cero, se cumple que  $\mathbf{B}_a = \mathbf{C}_a$ . Los elementos de estas matrices, adaptados a la notación usada en óptica ocular, son:

$$\begin{aligned} \langle a_n^m a_{n'}^{m'} \rangle = & \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 0.023 \pi^{8/3} \left( \frac{R_p}{p_0} \right)^{5/3} \sqrt{(n+1)(n'+1)} (-1)^{[(n+n')-2m]/2} \delta_{m,m'} \\ & \frac{\Gamma(14/3) \Gamma[(n+n'-5/3)/2]}{\Gamma[(-n+n'+17/3)/2] \Gamma[(n-n'+17/3)/2] \Gamma[(n+n'+23/3)/2]} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Esta expresión es válida para  $n$  y  $n' \neq 0$ , ya que el modelo de Kolmogorov predice una varianza infinita para el modo de pistón. La matriz de correlaciones resultante no es diagonal, ya que existen correlaciones no nulas entre modos diferentes con la misma frecuencia angular  $m$ . La ecuación (3.37) incorpora una corrección realizada con posterioridad, ya que en la notación usada  $m$  puede ser negativo (Wang y Markey 1978).

Una magnitud de interés es el valor de  $\langle \|W\|^2 \rangle$ , que en este caso coincide con la varianza  $\sigma_W^2(\mathbf{r})$ . No obstante, como la varianza del pistón es infinita, en realidad la magnitud de interés es la varianza residual de la aberración sin pistón,  $\Delta_0$ , de acuerdo con la definición dada en (3.32). Una estimación del valor de esta magnitud para una pupila circular es (Hu et al. 1989):

$$\Delta_0 \cong 1.037 \left( \bar{\lambda}/2\pi \right)^2 2^{5/3} \left( R_p/p_0 \right)^{5/3} \quad (3.38)$$

A partir de  $\Delta_0$  y de las varianzas de los modos de Zernike, dadas por (3.37), se hallan las demás varianzas residuales  $\Delta_M$ , también proporcionales a  $(R_p/p_0)^{5/3}$  (Noll 1976).

Por lo que respecta a las funciones de KL del modelo de Kolmogorov, uno de sus principales inconvenientes es que carecen de una forma analítica simple como la proporcionada en (3.10) para los Zernikes. Las funciones de más bajo orden son similares a polinomios de Zernike, aunque no así las de orden más elevado (Lane y Tallon 1992).

En relación con la generación de realizaciones individuales del frente, los métodos utilizados pueden sacar provecho de las propiedades de la estadística de Kolmogorov. Por ejemplo, sabemos que la suma de variables aleatorias gaussianas, aunque estas estén correlacionadas, también va a ser una variable gaussiana. En consecuencia, como  $W(\mathbf{r})$  es un proceso gaussiano para Kolmogorov, se puede suponer que el vector  $\mathbf{a}$  de

coeficientes de Zernike será un vector aleatorio gaussiano con valor medio  $\langle \mathbf{a} \rangle = 0$  y matriz de covarianzas  $\mathbf{B}_a$  dada por (3.37). La única dificultad para la generación de las realizaciones  $\mathbf{a}^{(k)}$  la produce el hecho de que  $\mathbf{B}_a$  no sea diagonal. No obstante, existen diferentes métodos para solventar este obstáculo, por ejemplo los basados en la diagonalización de la matriz de covarianzas o en la descomposición de Cholesky (Roddier 1990, Roggemann y Welsh 1996: 105).

### 3.2 Estimación modal

En las implementaciones reales del sensor HS los desplazamientos angulares teóricos  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}_n)$  de los centroides están perturbados por las fuentes de ruido comentadas en la sección 2.3, que se modelan en la expresión (2.33) por medio de la inclusión de ruido aditivo  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}_n)$  en el valor de las medidas experimentales  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$ . Una vez que se dispone de las medidas del sensor, es necesario hallar el frente de onda responsable de las mismas haciendo uso del modelo teórico que relaciona ambas magnitudes. Para ello se ha de emplear un determinado criterio de estimación y calcular el frente  $W(\mathbf{r})$  que lo maximice o lo minimice, según el caso. Los procedimientos más utilizados son los lineales, en los que los parámetros del frente de onda a determinar se expresan como combinaciones lineales de las medidas experimentales. Evidentemente, en un sensor experimental sólo se puede disponer de un conjunto finito de medidas (que para el HS es igual a  $2N$ , donde  $N$  es el número total de subaperturas), mientras que el frente de ondas es una función continua definida en la pupila. Esto provoca que no sea posible recuperar toda la información acerca de  $W(\mathbf{r})$  y haya que conformarse con manejar una aproximación limitada, por ejemplo usando un número finito  $M$  de parámetros que describan el frente. Además, debido a la presencia de ruido es conveniente que este número  $M$  de parámetros a estimar sea inferior al número  $2N$  de medidas disponibles.

Sea  $\mathbf{m}$  el vector de dimensiones  $2N \times 1$  formado al ordenar las componentes de los  $N$  vectores bidimensionales  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$  de medidas según:

$$\mathbf{m} = [m_x(\mathbf{r}_1) \quad \dots \quad m_x(\mathbf{r}_N) \quad m_y(\mathbf{r}_1) \quad \dots \quad m_y(\mathbf{r}_N)]^T \quad (3.39)$$

Siguiendo la ordenación de (3.39), también se pueden definir los vectores  $\boldsymbol{\mu}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  análogos. Entonces, si los  $M$  parámetros de interés del frente de ondas se reúnen en otro vector de dimensiones  $M \times 1$ , en un método lineal sus valores se han de poder hallar por medio de una matriz  $M \times 2N$  que premultiplique a  $\mathbf{m}$ . El objetivo de la estimación es el de hallar las componentes de dicha matriz que satisfagan el criterio elegido.



Se pueden distinguir dos tipos principales de métodos de estimación: las estimaciones zonales y las modales (Southwell 1980, Rousset 1999). En el primer tipo los parámetros de interés son los valores de  $W(\mathbf{r})$  en un conjunto finito de  $M$  puntos de la pupila. En el segundo, se supone que los frentes de onda a reconstruir se pueden aproximar adecuadamente por una combinación lineal de  $M$  polinomios definidos en el plano de la pupila; las variables a determinar son los valores  $\hat{\mathbf{a}}_M$  de los pesos de dicho desarrollo que satisfagan el criterio de estimación. Equivalentemente, el objetivo del método modal es hallar los elementos de la matriz  $\mathbf{R}$  tal que:

$$\hat{\mathbf{a}}_M = \mathbf{R}\mathbf{m} \quad (3.40)$$

En aberrometría ocular se suele usar un procedimiento modal con los polinomios de Zernike. Esto se debe principalmente a que los modos de bajo orden se pueden relacionar fácilmente con ciertas aberraciones, como el desenfoque, el astigmatismo, la aberración esférica o el coma. Gracias a ello, la interpretación de los resultados se simplifica notablemente. La ortogonalidad de las funciones base no es un requisito para la estimación modal, aunque ayuda a simplificar las expresiones de muchas magnitudes estadísticas. En este capítulo se analizan de manera exclusiva los métodos modales.

En definitiva, nos interesa hallar el frente  $\hat{W}_M(\mathbf{r})$  que verifique el criterio de estimación de entre todos los posibles candidatos  $W_M(\mathbf{r})$  tales que:

$$W_M(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^M a_j Z_j(\mathbf{r}/R_p) \quad (3.41)$$

En términos de coeficientes de Zernike, se desea hallar el vector de coeficientes  $\hat{\mathbf{a}}_M$  que cumpla el criterio de entre todos los vectores  $M$ -dimensionales  $\mathbf{a}_M$  posibles.

Gracias a la linealidad de la ecuación (2.16), la acción del sensor sobre cada frente  $W_M(\mathbf{r})$  es igual a la combinación lineal de los desplazamientos de los centroides asociados a cada polinomio de Zernike pesados por los coeficientes  $\mathbf{a}_M$  del frente:

$$\boldsymbol{\mu}_M(\mathbf{r}_n) \equiv \int i_n(\mathbf{r}) \nabla W_M(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \sum_{j=1}^M a_j \int i_n(\mathbf{r}) \nabla Z_j(\mathbf{r}/R_p) d^2\mathbf{r} \quad (3.42)$$

Por tanto, la acción del sensor sobre cada frente de prueba  $W_M(\mathbf{r})$  se puede representar por la siguiente identidad matricial:

$$\boldsymbol{\mu}_M = \mathbf{B}\mathbf{a}_M \quad (3.43)$$

Los elementos de la matriz  $\mathbf{B}$ , de dimensiones  $2N \times M$ , se obtienen como:

$$B_{s,j} = \int i_n(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial u} Z_j(\mathbf{r}/R_p) d^2\mathbf{r} \quad (3.44)$$

De acuerdo con el ordenamiento de (3.39), el índice  $n$  de cada subapertura y la componente del gradiente  $u$  están relacionadas con el índice  $s$  de las filas de  $\mathbf{B}$  según:

$$n = \begin{cases} s, & \text{si } s \leq N \\ s - N, & \text{si } s > N \end{cases} \quad u = \begin{cases} x, & \text{si } s \leq N \\ y, & \text{si } s > N \end{cases} \quad (3.45)$$

Como se ve, cada columna  $j$  de la matriz  $\mathbf{B}$  representa la proyección de las componentes del gradiente del polinomio  $j$ -ésimo sobre las distribuciones de irradiancia asociadas a cada subpupila. Por tanto,  $\mathbf{B}$  depende tanto de la geometría de la matriz de microlentes del sensor como de las funciones base elegidas para representar al frente. En esta tesis, los elementos de la matriz  $\mathbf{B}$  se calculan numéricamente usando MATLAB.

Si en lugar del promedio del gradiente, se opta por usar el modelo que simplemente evalúa el gradiente en el centro de cada subapertura, se tiene que:

$$B_{s,j} = \left. \frac{\partial}{\partial u} Z_j(\mathbf{r}/R_p) \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_n} \quad (3.46)$$

### 3.2.1 Estimación por mínimos cuadrados

El criterio de estimación más sencillo es el método de mínimos cuadrados (sin ponderar), que permite encontrar una solución cuando no se dispone de información acerca de la estadística del frente de onda o del ruido. Consiste en encontrar el valor de  $\mathbf{a}_M$  para el que los correspondientes centroides de prueba  $\boldsymbol{\mu}_M$ , dados por (3.43), minimicen la distancia euclídea con las medidas reales  $\mathbf{m}$  (Barrett y Myers 2004: 49):

$$\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = \arg \min_{\mathbf{a}_M} \left\{ \|\mathbf{m} - \mathbf{B}\mathbf{a}_M\|^2 \right\} \quad (3.47)$$

Al usar (3.43) para construir los centroides de prueba no se tiene en cuenta el efecto del ruido, que como se sabe contribuye al valor de  $\mathbf{m}$ . En general, los posibles valores del vector  $2N$ -dimensional de ruido  $\boldsymbol{\eta}$  no pueden ser generados por combinaciones lineales de las  $M$  columnas de  $\mathbf{B}$ , ya que  $M < 2N$ . En consecuencia, el valor de la norma del residuo  $\mathbf{r}_{\text{LS}} = \mathbf{m} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}}$  de la solución es mayor que cero.

La solución de la ecuación (3.47) se halla calculando el valor de  $\mathbf{a}_M$  que resuelva el siguiente sistema (Tyson 1991: 237):

$$\left\{ \nabla_{\mathbf{a}_M} \|\mathbf{m} - \mathbf{B}\mathbf{a}_M\|^2 \right\}_{\mathbf{a}_M = \hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}}} = 0 \quad (3.48)$$

Por medio de  $\nabla_{\mathbf{a}_M}$  se denota al gradiente respecto a  $\mathbf{a}_M$ . Las siguientes propiedades, fácilmente demostrables, son útiles en la resolución (Barrett y Myers 2004: 1402):

$$\nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{y}^T \mathbf{x}] = \mathbf{y}; \quad \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{M}\mathbf{x}] = \mathbf{M}; \quad \nabla_{\mathbf{x}} [\mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x}] = [\mathbf{M} + \mathbf{M}^T] \mathbf{x} \quad (3.49)$$

Haciendo uso de (3.49), las condiciones (3.48) son equivalentes a:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = \mathbf{B}^T \mathbf{m} \quad (3.50)$$

A esta identidad se le conoce como la ecuación normal (Barrett y Myers 2004: 49) y puede ser interpretada geoméricamente si se reformula como (Strang 2003: 198):

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{m} - \mathbf{B} \hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}}) = 0 \quad (3.51)$$

Por tanto, la solución de mínimos cuadrados  $\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}}$  es aquella para la cual el vector residuo  $\mathbf{r}_{\text{LS}}$  es ortogonal a las columnas de  $\mathbf{B}$  y, por tanto, al espacio vectorial generado por ellas,  $\text{col}(\mathbf{B})$ . Empleando argumentos geométricos se puede concluir que la solución  $\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}}$  de mínimos cuadrados es la proyección ortogonal del vector experimental  $\mathbf{m}$  sobre el espacio vectorial columna de  $\mathbf{B}$ . Si se denota por  $\mathbf{P}_{\text{col}}$  a la matriz (hermítica e idempotente) que representa dicha proyección, entonces  $\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = \mathbf{P}_{\text{col}} \mathbf{m}$ .

La matriz  $\mathbf{R}_{\text{LS}}$  que resuelve el problema de mínimos cuadrados es la pseudo-inversa de Moore-Penrose (MPP) de la matriz  $\mathbf{B}$  y puede ser calculada a partir de su descomposición en valores singulares (Barrett y Myers 2004: 51). Se puede verificar que, en efecto,  $\mathbf{B} \mathbf{R}_{\text{LS}}$  representa al proyector ortogonal  $\mathbf{P}_{\text{col}}$ . Existe una situación de especial interés en la que el cálculo de la pseudo-inversa se simplifica. En particular, si la matriz  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  tiene inversa, la solución de mínimos cuadrados queda:

$$\hat{\mathbf{a}}_M^{\text{LS}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \quad (3.52)$$

Evidentemente, comparando esta expresión con (3.40):

$$\mathbf{R}_{\text{LS}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \quad (3.53)$$

La invertibilidad de  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  está relacionada con la unicidad de la solución al problema  $M$ -dimensional de mínimos cuadrados. En particular, la solución dada por (3.52) al problema de (3.47) existe si las columnas de  $\mathbf{B}$  son linealmente independientes<sup>1</sup> y, en tal caso, esta solución es única (Herrmann 1981, Barrett y Myers 2004: 50). Esta independencia lineal de las columnas de  $\mathbf{B}$ , dadas por los gradientes de

---

<sup>1</sup> La solución de mínimos cuadrados (3.52) es una generalización del producto escalar normalizado que se obtiene cuando  $M=1$ . Evidentemente, en dicho caso no hay que preocuparse de la independencia lineal del único vector columna de  $\mathbf{B}$ .

los polinomios de Zernike filtrados pasa-baja y discretizados por las subaperturas, depende de la geometría del patrón de subpupilas del sensor y del número  $M$  de modos reconstruidos. En caso de que  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  no sea invertible, la solución de mínimos cuadrados no es única, lo que es síntoma de que el número  $M$  de modos a estimar no es el adecuado para la configuración del sensor disponible, ya que diferentes combinaciones de polinomios producen soluciones con el mismo residuo. En consecuencia, es conveniente evitar que esta situación se produzca limitando el valor de  $M$ . Se puede comprobar que la opción que se adopta al estimar los coeficientes de Zernike usando la MPP es la de seleccionar de entre todas las soluciones con mínimo residuo  $\|\mathbf{r}_{LS}\|^2$  aquella solución con menor norma  $\|\hat{\mathbf{a}}_M^{LS}\|^2$  (Barrett y Myers 2004: 51). A pesar de todo, la estimación del frente cuando la solución no es única es útil en las aplicaciones en las que haya que realizar no sólo tareas de estimación, sino también de control, como ocurre con los sistemas de óptica adaptativa (Tyson 1991: 238).

### 3.2.2 Otros procedimientos

Además del método de mínimos cuadrados, existen otros procedimientos que permiten estimar la función de aberración. Para ilustrar este hecho, en este apartado se revisa el estimador lineal de mínima varianza, en el que se emplea información acerca de la estadística de las aberraciones y del ruido del sensor. El método se basa en hallar el frente  $\hat{W}(\mathbf{r})$  que minimice el denominado error cuadrático medio de la estimación:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \left\langle \left\| W(\mathbf{r}) - \hat{W}(\mathbf{r}) \right\|^2 \right\rangle = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \left\langle \left[ W(\mathbf{r}) - \hat{W}(\mathbf{r}) \right]^2 \right\rangle d^2\mathbf{r} \quad (3.54)$$

En el campo de la óptica atmosférica, este problema fue abordado por primera vez por Wallner en el contexto del estudio del error de reconstrucción de un sistema de óptica adaptativa con respuesta temporal instantánea (Wallner 1983). Si se usa un lazo abierto, este problema es idéntico al de la estimación de las aberraciones considerado en esta tesis, con la salvedad de que  $\hat{W}(\mathbf{r})$  se reinterpreta como la corrección generada por el espejo deformable y los modos en los que se descompone dicha función son las funciones de influencia de los actuadores del espejo, que en general no son ortogonales.

Si en la expresión (3.54) se sustituye el desarrollo modal del frente estimado y se usa la relación lineal (3.40) entre coeficientes estimados y medidas:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \left\langle \left[ W(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^M Z_j(\mathbf{r}/R_p) \sum_{s=1}^{2N} R_{j,s} m_s \right]^2 \right\rangle d^2\mathbf{r} \quad (3.55)$$

Si se desarrolla este cuadrado y se usa la ortonormalidad de los polinomios de Zernike:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle \|W(\mathbf{r})\|^2 \rangle + \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{C}_m\mathbf{R}^T) - 2 \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^{2N} R_{j,s} \langle a_j m_s \rangle \quad (3.56)$$

El siguiente paso consiste en hallar los valores particulares de los elementos  $R_{j,s}$  de la matriz de estimación que minimizan  $\langle \varepsilon^2 \rangle$ . Para ello, se igualan a cero las derivadas parciales de  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  respecto de  $R_{j,s}$  y se resuelven las  $M \times 2N$  ecuaciones resultantes. La solución a la que se llega es:

$$\mathbf{R}_{MV} = \mathbf{C}_{a,m} \mathbf{C}_m^{-1} \quad (3.57)$$

Es evidente que el cálculo de esta matriz requiere del conocimiento de tanto la estadística de las aberraciones como del ruido.

Otro método explorado en la literatura de óptica atmosférica es el bayesiano. Suponiendo que tanto los coeficientes del desarrollo modal del frente de ondas como el ruido  $\boldsymbol{\eta}$  siguen distribuciones gaussianas de valor medio cero, para este estimador se obtienen las expresiones (Solomon et al. 1995, Law y Lane 1996):

$$\mathbf{R}_{MAP} = (\mathbf{B}^T \mathbf{C}_\eta^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}_a^{-1})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\eta^{-1} = \mathbf{C}_a \mathbf{B}^T (\mathbf{B} \mathbf{C}_a \mathbf{B}^T + \mathbf{C}_\eta)^{-1} \quad (3.58)$$

Law y Lane mostraron que la solución bayesiana coincide con la de Wallner cuando el número de modos  $M'$  usados para describir el frente real tiende a infinito.

### 3.3 Evaluación de las estimaciones

En esta sección se estudia el error que se comete al estimar las aberraciones con un sensor de gradiente. Para ello, se utilizan diferentes métricas que comparan el resultado  $\hat{W}(\mathbf{r})$  del proceso de estimación con el frente real  $W(\mathbf{r})$  presente en la pupila del sensor. El tratamiento que se presenta, además de considerar la aleatoriedad introducida por el ruido  $\boldsymbol{\eta}$  del sensor, incluye el hecho de que el frente real  $W(\mathbf{r})$  es un proceso aleatorio, por lo que su estadística juega un papel relevante en la evaluación de las estimaciones. Las expresiones que se recogen no se limitan a describir la propagación del ruido, sino que también se incluyen los efectos de las aproximaciones y simplificaciones realizadas en la etapa de estimación. Otras de las cuestiones a estudiar en esta sección son las diferencias que se producen entre la estadística de los frentes de onda reconstruidos y la estadística de los frentes reales. Una adecuada comprensión de esta relación puede ayudar a sacar las conclusiones apropiadas a partir de la estadística observada en una muestra de frentes experimentales.

En la sección 3.2 se ha comentado que en las estimaciones modales se aproxima el frente de ondas por la combinación lineal de un número limitado de polinomios. En cambio, para poder representar con exactitud todos los posibles valores que el frente real  $W(\mathbf{r})$  puede tomar se necesita un número infinito de polinomios:

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{r}/R_p) \quad (3.59)$$

Es el frente real  $W(\mathbf{r})$ , y no su aproximación  $M$ -dimensional, el que origina los desplazamientos sin ruido  $\boldsymbol{\mu}$  y, por tanto, el que debe considerarse a la hora de modelar el comportamiento real del sensor. Para ello existen dos posibilidades. La primera consiste en utilizar directamente el modelo del sensor en función del frente de ondas, representado por la acción de un operador integral lineal y la adición de ruido. Por ejemplo, si se considera que la expresión (2.19) modela adecuadamente la acción del sensor (lo que es una suposición básica de esta sección):

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_n) = -\int \nabla i_n(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}_n) \quad (3.60)$$

La segunda opción consiste en utilizar un modelo matricial para el sensor, similar al usado en la estimación. No obstante, ahora surge el problema de que la matriz correspondiente,  $\mathbf{A}$ , necesita un número infinito de columnas debido al número infinito de polinomios que se consideran. Si se desea realizar simulaciones numéricas, es necesario relajar este requerimiento. Para ello se supone que es suficiente con tomar un número  $M'$  finito de modos, aunque elevado (Dai 1996, Diaz-Santana et al. 2005):

$$W(\mathbf{r}) = \left[ \mathbf{Z}(\mathbf{r}/R_p) \right]^T \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{M'} a_i Z_i(\mathbf{r}/R_p) \quad (3.61)$$

Usando (3.61), los desplazamientos experimentales de los centroides obedecen al siguiente modelo matricial:

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\mathbf{a} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.62)$$

En caso de que para construir la matriz de estimación  $\mathbf{R}$  se use la misma relación teórica (2.16) que se emplea en  $\mathbf{A}$ , entonces, si  $\mathbf{A}_M$  representa el primer bloque  $2N \times M$  de  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_M \quad (3.63)$$

Esta relación no se tiene por qué verificar forzosamente, ya que aunque para el cálculo de  $\mathbf{A}$  se deba emplear el modelo que se suponga correcto para el sensor, en  $\mathbf{B}$  se puede utilizar un modelo aproximado, como sucede en (3.46). Con esta distinción va a ser posible evaluar los errores introducidos al emplear en el proceso de estimación una

relación teórica entre los desplazamientos de los centroides y el gradiente local del frente diferente de la que se suponga correcta.

El uso de las expresiones (3.60) o (3.62) y de la ecuación de estimación (3.40) asociada a cada método permite evaluar la calidad con la que se reconstruye  $W(\mathbf{r})$  en una configuración determinada del sensor y para una población dada de frentes de onda.

### 3.3.1 Evaluación en términos de la función característica

Si se usa el modelo integral del sensor dado en (3.60), la expresión del frente estimado es (Bará 2007):

$$\hat{W}(\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') W(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' + \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}/R_p) \right]^T \mathbf{R} \boldsymbol{\eta} \quad (3.64)$$

A partir de esta relación teórica entre el frente estimado y el real, se pueden calcular diferentes métricas que describen la calidad de la estimación. Bará denomina a  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  la “función característica” del sensor. Esta función de respuesta de impulso es igual a:

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}/R_p) \right]^T \mathbf{R} \mathbf{i}'(\mathbf{r}') \quad (3.65)$$

El vector  $\mathbf{i}'(\mathbf{r}')$ , de dimensiones  $2N \times 1$ , se obtiene al ordenar los gradientes de las distribuciones normalizadas de irradiancia de cada subpupila según (3.39):

$$\mathbf{i}'(\mathbf{r}') = \left[ \partial/\partial x_{i_1}(\mathbf{r}') \quad \dots \quad \partial/\partial x_{i_N}(\mathbf{r}') \quad \partial/\partial y_{i_1}(\mathbf{r}') \quad \dots \quad \partial/\partial y_{i_N}(\mathbf{r}') \right]^T \quad (3.66)$$

Es evidente que:

$$\boldsymbol{\mu} = - \int \mathbf{i}'(\mathbf{r}') W(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' \quad (3.67)$$

En definitiva,  $h$  depende de la geometría del patrón de subaperturas y de magnitudes vinculadas al proceso de estimación, como el tipo y número  $M$  de polinomios usados.

Para terminar de describir las propiedades de  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , nótese que:

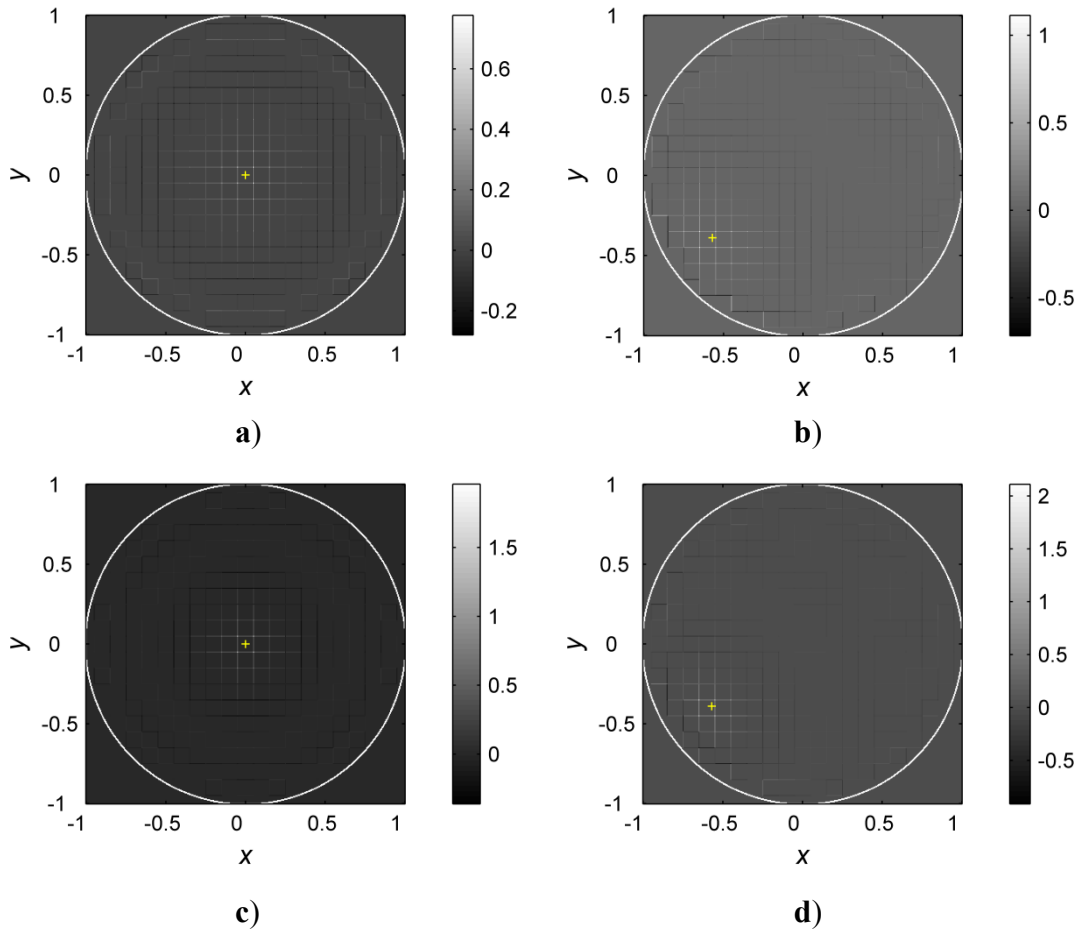
$$\int h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' = - \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}/R_p) \right]^T \mathbf{R} \int \mathbf{i}'(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' \quad (3.68)$$

La transformada de Fourier de una derivada es  $\text{TF}\{\partial/\partial u i(\mathbf{r})\} = (2\pi i) \nu_u \text{TF}\{i(\mathbf{r})\}$ . Como en (3.68) se evalúa esta transformada en  $\mathbf{v} = 0$ :

$$\int h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' = 0 \quad (3.69)$$

Esta ecuación expresa de otra manera que el sensor no es sensible al modo de pistón.

De acuerdo con (3.64) y obviando el término de propagación del ruido, el valor del frente estimado en un punto  $\mathbf{r}$  de la pupila no es igual al valor del frente real  $W(\mathbf{r}')$  en el mismo punto, sino que diferentes valores del frente real para otras posiciones  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$  pueden influir en el resultado de la estimación a través de  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . En particular, según (3.65)  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  viene dada por combinaciones lineales de los elementos del vector  $\mathbf{i}'(\mathbf{r}')$ , formado por las derivadas parciales de la distribución normalizada de irradiancia de cada subapertura. Nótese que la reconstrucción sería ideal si  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ .



**Figura 3.1:** Función característica  $h_{LS}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  de la configuración de la figura 2.2a) con: a)  $M=35$  y  $\mathbf{r}=(x, y)=(0, 0)$ , b)  $M=35$  y  $\mathbf{r}=(-0.57, -0.39) R_p$ , c)  $M=65$  y  $\mathbf{r}=(0, 0)$  y d)  $M=65$  y  $\mathbf{r}=(-0.57, -0.39) R_p$ . Las circunferencias señalan las pupilas de radio unidad, mientras que las cruces indican la posición del punto  $\mathbf{r}$  del frente estimado. Las escalas abarcan los rangos de valores de  $h$ .

Para ilustrar el papel de  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , se calcula su valor para la configuración particular del sensor HS de la figura 2.2a). Las subpupilas son cuadradas, por lo que si se supone que la irradiancia es constante en cada una de ellas, entonces los elementos de  $\mathbf{i}'(\mathbf{r}')$  se evalúan mediante (2.24). La figura 3.1a) muestra el valor de  $h$  cuando el frente se estima en el centro de la pupila del sensor y se reconstruyen  $M=35$  modos por



mínimos cuadrados. Se comprueba que el sensor no es sensible a los valores del frente real en aquellas posiciones  $\mathbf{r}'$  no situadas en el borde de una subapertura. Este hecho ya se había subrayado en (2.27) y es consecuencia de la suposición de irradiancia constante. La figura 3.1b) muestra el valor de  $h$  para el mismo sensor, pero ahora para un punto  $\mathbf{r}$  próximo al borde de la pupila. En 3.1c) se reproduce la misma situación que en 3.1a), con la diferencia de que el número de modos estimados es ahora mayor:  $M=65$ . En esta situación las contribuciones más relevantes están más localizadas en el centro de la pupila y los pesos extremos de  $h$  son mayores. En 3.1d) se reproduce el cálculo de 3.1b) con  $M=65$ .

*a) Modificación de la estadística del frente y error de estimación*

La relación existente entre los momentos estadísticos de primer y segundo orden de los frentes estimados y reales puede expresarse fácilmente en función de  $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Considérese, en primer lugar, el valor esperado de la función de aberración estimada. Este promedio se puede entender como extendido a las medidas tomadas para un mismo ojo en varios instantes de tiempo o tomadas para los distintos ojos de una población. Si se toma el valor esperado de (3.64), se considera que el frente se muestrea con la misma red de subpupilas en todas las realizaciones y que el valor medio del ruido es cero:

$$\langle \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle = \int h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \langle W(\mathbf{r}') \rangle d^2 \mathbf{r}' \quad (3.70)$$

Como la función característica de un sensor real es distinta de la delta de Dirac, la expresión (3.70) muestra que los valores estimados del frente de ondas se ven alterados por el sensor y el proceso de estimación aún en ausencia de un error sistemático asociado a la estimación del centroide. Este error se cuantifica con el siguiente sesgo:

$$\langle W(\mathbf{r}) - \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle = \int [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \langle W(\mathbf{r}') \rangle d^2 \mathbf{r}' \quad (3.71)$$

Las expresiones de las magnitudes estadísticas de segundo orden también se pueden obtener con facilidad. Por ejemplo, si se supone no correlación entre las aberraciones y el ruido, entonces la función de autocorrelación del frente estimado es:

$$\begin{aligned} C_{\hat{W}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \iint h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') h(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') C_W(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d^2 \mathbf{r}' d^2 \mathbf{r}'' \\ & + \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_1/R_p) \right]^T \mathbf{R} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}^T \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_2/R_p) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Aparte del sumando asociado a la propagación del ruido, la doble integral del primer sumando muestra que los valores de la función de autocorrelación se ven alterados por efecto de la función característica. Utilizando (3.65) y (3.67) en (3.72):

$$C_{\hat{W}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_1/R_p) \right]^T \mathbf{R}(\mathbf{C}_\mu + \mathbf{C}_\eta) \mathbf{R}^T \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_2/R_p) \quad (3.73)$$

La función de estructura del frente estimado se halla usando (3.3) en (3.72):

$$D_{\hat{W}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \int [h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - h(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}')] [h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'') - h(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'')] C_W(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') d^2\mathbf{r}' d^2\mathbf{r}'' \\ + \left[ \mathbf{Z}_M^T(\mathbf{r}_1/R_p) - \mathbf{Z}_M^T(\mathbf{r}_2/R_p) \right] \mathbf{R} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}^T \left[ \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_1/R_p) - \mathbf{Z}_M(\mathbf{r}_2/R_p) \right] \quad (3.74)$$

La función de estructura de  $\hat{W}(\mathbf{r})$  depende de manera no trivial de  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  por medio del covector  $\mathbf{Z}_M(\mathbf{r})$ . Esto indica que no está garantizado que la aberración estimada sea homogénea o isotrópica aunque la aberración real sí lo sea (Roggemann et al. 1994).

### 3.3.2 Evaluación usando la representación matricial

Si se considera el modelo matricial (3.62) para las medidas del sensor junto con la ecuación de estimación (3.40), se obtiene la siguiente relación entre los vectores de coeficientes estimados y reales:

$$\hat{\mathbf{a}}_M = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{R} \boldsymbol{\eta} \quad (3.75)$$

Esta expresión indica que si se trabaja en el espacio de coeficientes de Zernike y se emplea un método de estimación lineal, la acción del sensor sobre el frente de ondas se puede representar por medio de la matriz  $\mathbf{R} \mathbf{A}$  y de un término de propagación del ruido a través de la estimación,  $\mathbf{R} \boldsymbol{\eta}$ . Como el número de modos del frente real es mayor que los que es posible reconstruir, la matriz  $\mathbf{R} \mathbf{A}$  no es igual a la identidad  $\mathbf{I}_{M,M}$ , sino que es una matriz rectangular de dimensiones  $M' \times M$  con elementos distintos de cero fuera de su diagonal. En consecuencia, es posible que un modo  $a_i$  perteneciente al frente real sea atribuido incorrectamente por el sensor a otro modo diferente del frente estimado,  $\hat{a}_j$ , con  $i \neq j$ . Cuando este fenómeno se produce, se origina un error en la estimación del modo  $j$  y se habla de acoplamiento intermodal. A fin de explicitar el truncamiento del vector de coeficientes, se puede definir un vector de coeficientes estimados  $M'$ -dimensional como:

$$\hat{\mathbf{a}} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_M \\ \mathbf{0}_{M'-M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{R} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0}_{M'-M} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

En caso particular de que se emplee la solución de mínimos cuadrados de (3.53) y de que se verifique (3.63), la matriz de acoplamiento  $\mathbf{R} \mathbf{A}$  queda:

$$\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A} = \left( \mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M \right)^{-1} \mathbf{A}_M^T \mathbf{A} \quad (3.77)$$

Siguiendo a Dai, usamos matrices por bloques para analizar esta expresión (Dai 1996):

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_M, \mathbf{A}_h] \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_M \\ \mathbf{a}_h \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

El vector  $\mathbf{a}_M$  contiene los  $M$  primeros coeficientes de  $\mathbf{a}$ , mientras que los de alto orden están contenidos en  $\mathbf{a}_h$ . Las matrices  $\mathbf{A}_M$  y  $\mathbf{A}_h$  se corresponden con bloques de  $\mathbf{A}$  de dimensiones  $2N \times M$  y  $2N \times (M'-M)$ , respectivamente. Como  $\mathbf{A}_M$  también aparece en la matriz de estimación  $\mathbf{R}_{LS}$ , entonces:

$$\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M,M}, & (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M)^{-1} \mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_h \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Aplicando la matriz de acoplamiento sobre el vector de coeficientes  $\mathbf{a}$ :

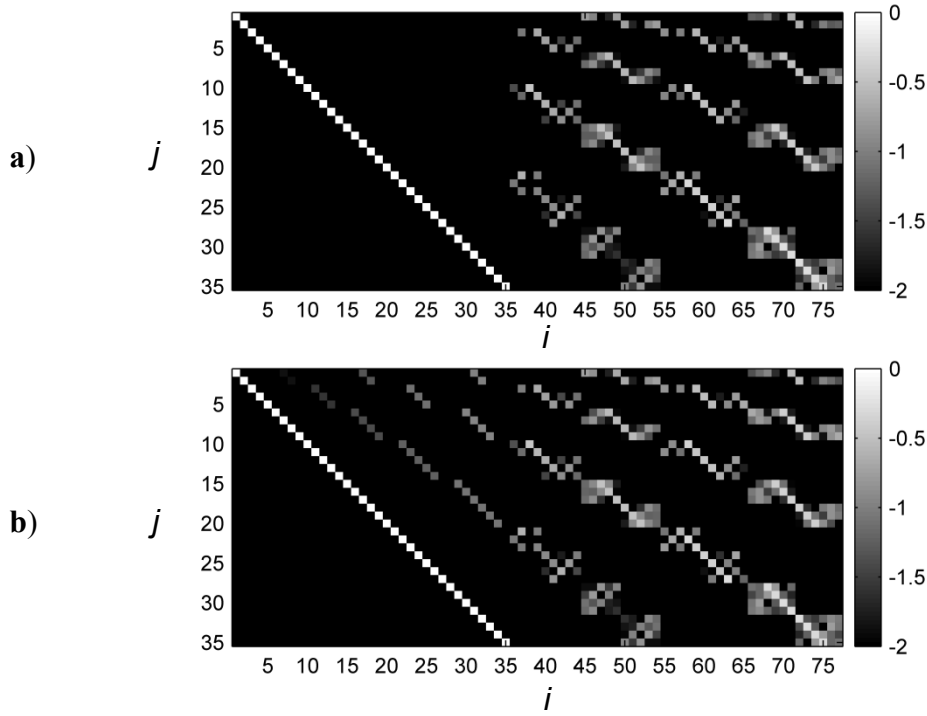
$$\hat{\mathbf{a}}_M = \mathbf{a}_M + (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M)^{-1} \mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_h \mathbf{a}_h + \mathbf{R}_{LS} \boldsymbol{\eta} \quad (3.80)$$

Ignorando el efecto del ruido, la expresión (3.80) muestra que el vector  $M$ -dimensional de coeficientes estimados  $\hat{\mathbf{a}}_M$  no es igual al vector formado por los  $M$  primeros modos del frente incidente,  $\mathbf{a}_M$ , sino que los modos de alto orden,  $\mathbf{a}_h$ , contribuyen al valor de los coeficientes de más bajo orden de la solución a través de la matriz de acoplamiento. Por esta razón, algunos autores se refieren a este tipo de acoplamiento modal como *aliasing* (Soloviev y Vdovin 2005). Lo que sucede es que aunque los modos de alto orden no se reconstruyan, sí que influyen en los valores experimentales de los desplazamientos de los centroides. Dicha contribución no nula provoca que los  $M$  coeficientes de la solución de mínimos cuadrados se recombinen respecto a los correspondientes valores del frente real a fin de minimizar el residuo.

La aparición del *aliasing* en la solución de mínimos cuadrados es el precio a pagar por el uso de la aproximación  $M$ -dimensional del frente. La matriz  $\mathbf{A}$  conecta un espacio vectorial de dimensiones infinitas con otro de dimensiones finitas, por lo que su núcleo (el espacio vectorial de las aberraciones  $\mathbf{a}$  tales que  $\mathbf{A}\mathbf{a} = 0$ ) tiene dimensiones infinitas. En consecuencia, si no se hubiese usado esta aproximación, el número de vectores  $\mathbf{a}$  que minimizarían el residuo  $\|\mathbf{m} - \mathbf{A}\mathbf{a}\|^2$  sería infinito. La aproximación (3.41) reduce de una manera muy fuerte el conjunto de perfiles que los frentes estimados pueden tomar: sólo pueden ser combinaciones lineales de un conjunto finito de polinomios, que en el caso de los Zernikes poseen unas variaciones espaciales más bien suaves. El error provocado depende de la medida en que esta aproximación pueda representar a las distintas realizaciones del frente de ondas real  $\mathcal{W}(\mathbf{r})$ .

Herrmann atribuyó el *aliasing* a una falta de ortogonalidad de las columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  (Herrmann 1981). En efecto, para que no existiese acoplamiento modal sería

suficiente con que  $\mathbf{A}_M^T \mathbf{A} = [\mathbf{I}_{M,M}, \mathbf{0}_{M,\infty}]$ , condición que expresa dicha ortogonalidad. Señalemos también que cuando se emplea la estimación de mínimos cuadrados pero  $\mathbf{A}_M$  no es de rango completo, entonces el primer bloque  $M \times M$  de la matriz  $\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}$  es diferente de la identidad: aparece también acoplamiento modal entre modos con  $i, j \leq M$  (Soloviev y Vdovin 2005). Como se comentó en el apartado 3.2.1, esta situación se puede evitar reduciendo el número de modos que se estiman.



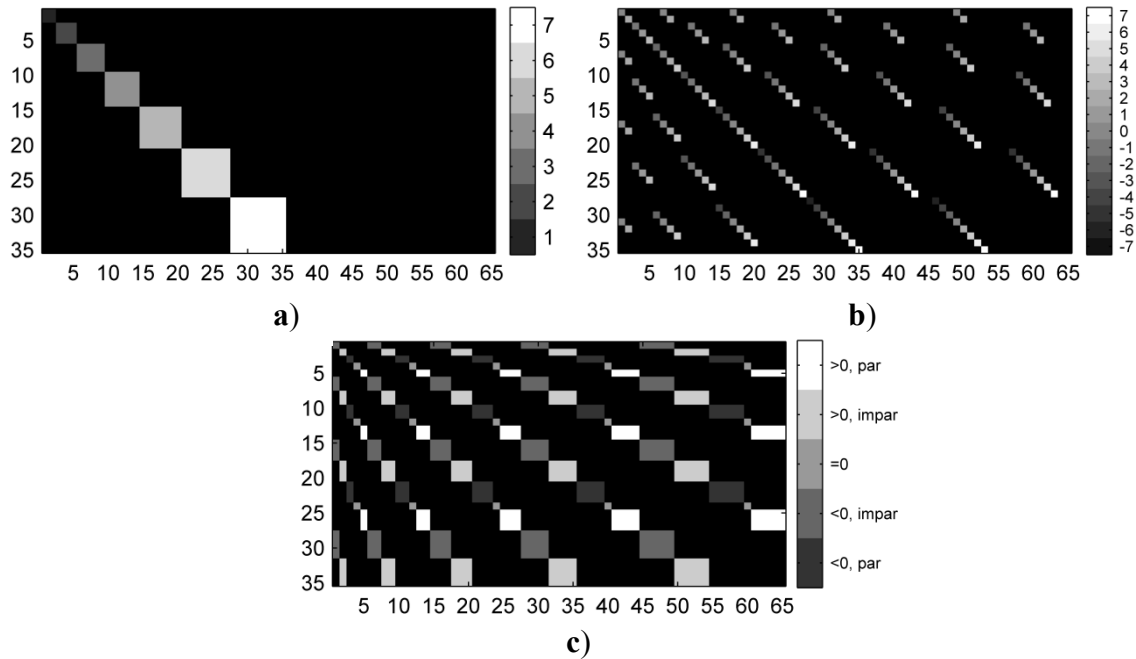
**Figura 3.2:** Matriz de acoplamiento  $\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}$  para la red de la figura 2.2a): a) sin y b) con error de estimación consistente en calcular  $\mathbf{B}$  con (2.29). Se usan  $M' = 77$  y  $M = 35$  modos de Zernike. En  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se supone irradiancia constante en cada microlente. Se muestra el  $\log_{10} |\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}|$ , con  $|\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}| \leq 10^{-2}$  en negro.

La magnitud del error de *aliasing*  $\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h \mathbf{a}_h$  depende de varios factores. En primer lugar, del valor de los modos de alto orden,  $\mathbf{a}_h$ . Por ejemplo, en las estimaciones experimentales de las aberraciones oculares en muestras de ojos con visión normal se observa un decrecimiento exponencial de la energía contenida en cada orden radial (Thibos et al. 2002c). La reproducción de este comportamiento en la estadística de los coeficientes reales ayudaría a reducir el impacto de esta fuente de error en esta población. Además, a través de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{R}_{LS}$  el error de acoplamiento también depende de los polinomios usados para descomponer el frente y de la geometría del patrón de microlentes del sensor (número, forma, tamaño y distribución de las subpupilas).

Otro tipo de acoplamiento modal, de origen diferente al *aliasing*, se produce como resultado de un error en el modelo usado en la estimación, es decir, cuando  $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}_M$ . En

esta situación, el primer bloque  $M \times M$  de la matriz de acoplamiento  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  no es igual a la identidad. Esto significa que: a) los elementos de la diagonal pueden ser distintos de la unidad, fenómeno que denominamos acoplamiento intramodal, y b) pueden aparecer acoplamientos intermodales entre los modos con  $i, j \leq M$  (Bará 2003).

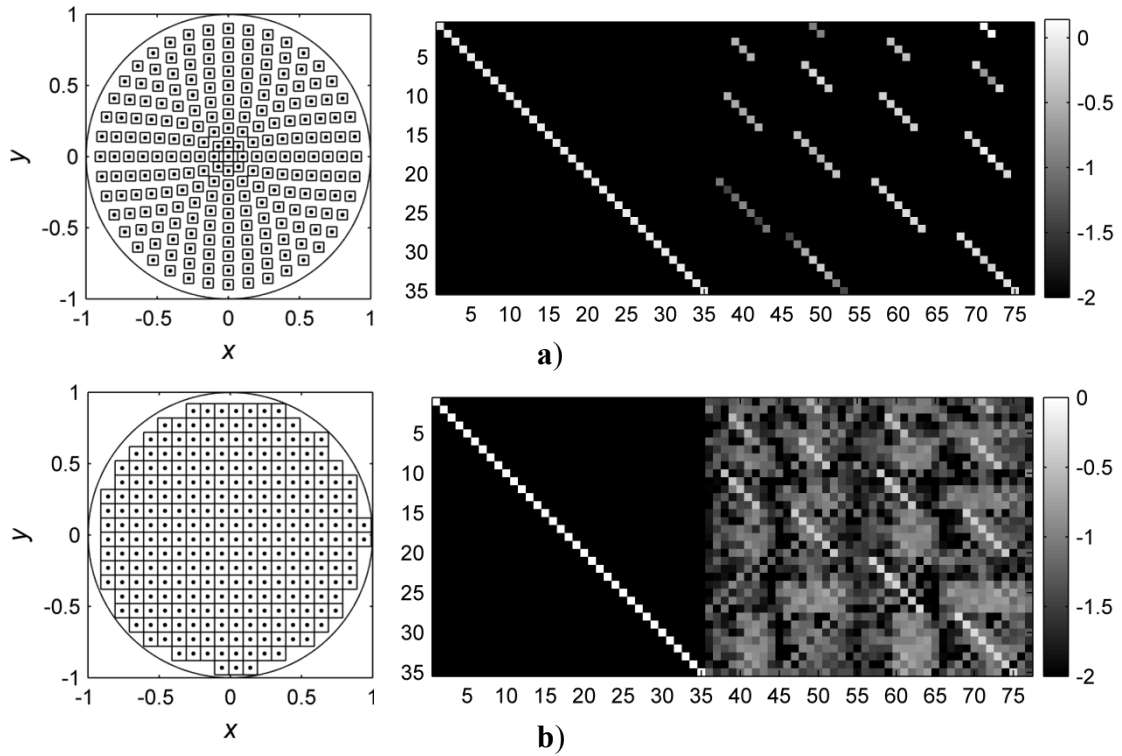
En la figura 3.2a) se representan las primeras  $M' = 77$  columnas de la matriz de acoplamiento  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  calculadas para  $M = 35$  modos estimados y la configuración de la figura 2.2a). Tal y como indica (3.79), el primer bloque es la identidad  $\mathbf{I}_{35,35}$ . En el bloque restante hay elementos no nulos que originan el *aliasing*. La figura 3.2b) muestra la matriz de acoplamiento cuando en el cálculo de  $\mathbf{A}$  se usa el modelo (2.28) con el promedio espacial del gradiente y en  $\mathbf{B}$  se usa (2.29), que evalúa el gradiente en el centro de la subapertura. El resultado es la aparición de acoplamientos adicionales entre los modos con  $i, j \leq M$ . En particular, los valores de la matriz  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  favorecen el acoplamiento intermodal de modos con índice  $i \leq M$  a otros con  $j < i$ . Para la base de Zernikes y la red de subpupilas usadas, este acoplamiento es más relevante entre pares de modos con la misma frecuencia angular  $m$  (hay acoplamientos no nulos entre otros pares, pero están en negro en la figura al ser  $|RA_{j,i}| \leq 10^{-2}$ ). El acoplamiento intramodal no es numéricamente relevante para esta configuración.



**Figura 3.3:** elementos  $RA_{j,i}$  tales que: a)  $n_j = n_i$  (la escala de grises da el valor de  $n$ ); b)  $m_j = m_i$  (la escala da los valores de  $m$ ); c)  $m_j$  y  $m_i$  tienen mismo signo y paridad. Se usan Zernikes ordenados según (3.15).

A fin de ayudar a familiarizarse con la forma en la que el ordenamiento de los polinomios de Zernike dado por (3.15) se refleja en las matrices  $\mathbf{RA}$  (o en las matrices

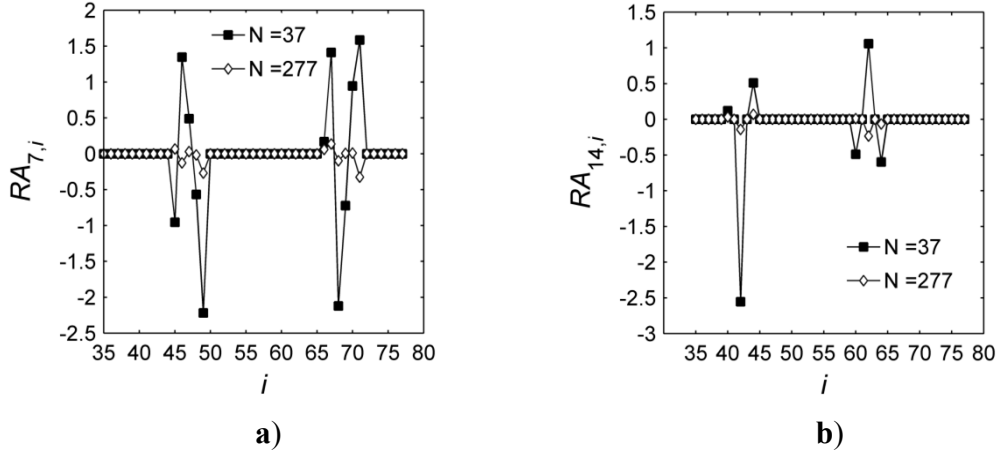
de correlación de coeficientes de Zernike), en la figura 3.3 se muestra la localización de los elementos de la matriz con: a) el mismo orden radial  $n$ , b) idéntica frecuencia angular  $m$  y c) frecuencias angulares con el mismo signo y paridad. A partir de la figura 3.3c), se comprueba que en las matrices  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  de las figuras 3.2 las contribuciones al modo estimado  $j$  originadas por *aliasing* proceden de modos de alto orden  $i$  con una frecuencia  $m$  con idéntico signo y paridad. Este hecho es consecuencia tanto del uso de los polinomios de Zernike como de la distribución de los centros de las microlentes en la configuración de la figura 2.2a).



**Figura 3.4:** distribución de las microlentes y matrices  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  para: a) una red polar de subpupilas cuadradas con lado  $d = 0.070 R_p$  y espaciado  $L = 0.100 R_p$ ; b) una red cuadrada de subpupilas cuadradas con  $d = L = 0.100 R_p$  y cuya microlente central está desplazada  $[0.4, -0.3] d$  con respecto al centro de la pupila ocular. Se muestra el  $\log_{10}|\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}|$ .

Con el objetivo de ilustrar la influencia de la distribución de las microlentes en el *aliasing*, en la figura 3.4a) se muestra la matriz de acoplamiento obtenida para una red polar de subpupilas cuadradas. Para esta configuración, el *aliasing* se produce de manera preferente entre modos con igual  $m$ . Por su parte, en la figura 3.4b) se presenta la matriz de acoplamiento para una red similar a la de la figura 2.2a), con la salvedad de que la pupila ocular no es concéntrica a la microlente central del patrón. Esta situación no es extraña en aberrometría ocular, ya que la pupila ocular se encuentra en continuo

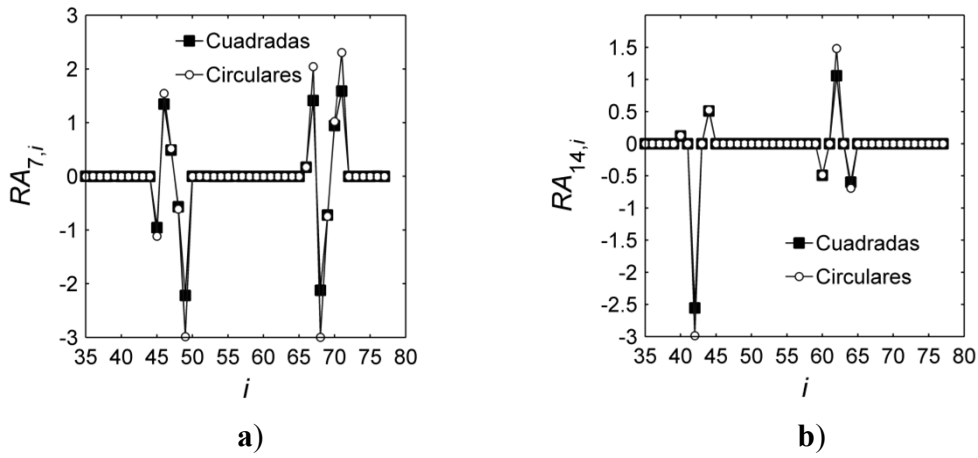
movimiento. El muestreo irregular de las derivadas de los polinomios de Zernike hace que el *aliasing* ya no se produzca de manera tan destacada entre modos con la misma frecuencia; en su lugar, el acoplamiento puede ser relevante entre modos que no cumplen dicha condición.



**Figura 3.5:** filas de la matriz  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$  correspondientes al *aliasing* de los modos de alto orden para: a)  $j=7$  (coma vertical) y b)  $j=14$  (aberración esférica). Se muestran los valores desde  $i = M=35$  ( $n=7$ ) hasta  $i=77$  ( $n=11$ ). Se han usado las redes de la figura 2.2, con diferentes densidades de microlentes.

La densidad de microlentes afecta de manera diferente a la matriz de acoplamiento  $\mathbf{R}_{LS}\mathbf{A}$ . Para comprobarlo, se comparan las matrices correspondientes a las dos redes de la figura 2.2. La matriz correspondiente a la figura 2.2a) está representada en 3.2a). Por su parte, los elementos más importantes de la matriz de la figura 2.2b) coinciden con los de la matriz 2.2a), aunque ahora sus valores son más elevados y en ocasiones tienen signo opuesto. Por ejemplo, en la figura 3.5 se representan las filas a)  $j=7$  y b)  $j=14$  de las matrices de ambas redes, que se corresponden con el *aliasing* que experimentan el coma vertical y la aberración esférica, respectivamente. Claramente, la magnitud del acoplamiento es mayor para la red con menor número de subaperturas. Esto no quiere decir que la estrategia a seguir en un sistema real sea la de trabajar con el mayor número  $N$  de subaperturas posibles. Como indica la ecuación (3.80), también se ha de tener en cuenta la propagación del ruido. En un sistema real, disminuir el tamaño de las subaperturas implica un aumento del tamaño de los *spots* (suponiendo que las subpupilas están limitadas por difracción) y un descenso del número de fotones capturados (para un tiempo de integración dado). Todo ello producirá un incremento de la magnitud del ruido  $\eta$ .

Por último, analizamos brevemente el impacto de la forma de las subpupilas en los elementos de la matriz de acoplamiento. Para ello, comparamos la matriz asociada a la red de subpupilas cuadradas de lado  $d$  de la figura 2.2b) con la asociada a una red de subpupilas circulares de diámetro  $D = d$  con los mismos centros. La representación de las matrices  $\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}$  muestra que los modos que contribuyen al “aliasing” son los mismos en ambos casos. En las figuras 3.6a) y 3.6b) se representan las filas correspondientes al acoplamiento al coma vertical y a la aberración esférica, respectivamente. El efecto de la forma de las subpupilas es un factor menor comparado con la influencia de la distribución de los centros de las microlentes.



**Figura 3.6:** filas de la matriz  $\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}$  correspondientes al *aliasing* de los modos de alto orden para: a)  $j=7$  (coma vertical) y b)  $j=14$  (aberración esférica). Se muestran los valores desde  $i = M=35$  ( $n=7$ ) hasta  $i=77$  ( $n=11$ ). Se compara el patrón de microlentes cuadradas de la figura 2.2b) con un patrón de microlentes circulares con los mismos centros.

#### a) Modificación de la estadística del frente y error de estimación

La relación matricial presentada en (3.75) puede usarse para estudiar posibles cambios en la estadística del frente estimado respecto del real. Para ello, se emplea esa ecuación para calcular los momentos estadísticos del vector de coeficientes estimados  $\hat{\mathbf{a}}_M$  en función de los momentos del vector de coeficientes reales  $\mathbf{a}$ . Nos centramos en los momentos de primer y segundo orden: el valor esperado y la matriz de covarianzas. También estudiamos los momentos del vector error de estimación,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}$ .

Tomemos el valor esperado en la expresión (3.75). Si la pupila ocular está muestreada por la misma red en todas las realizaciones y si el valor medio de las componentes del ruido en todas las subaperturas es igual a cero, entonces:

$$\langle \hat{\mathbf{a}}_M \rangle = \mathbf{R}\mathbf{A} \langle \mathbf{a} \rangle \quad (3.81)$$



De nuevo, los valores esperados de los coeficientes estimados no son una mera réplica de los valores esperados de los  $M$  primeros coeficientes del vector real. De hecho, si se considera el método de mínimos cuadrados y se aplica el valor esperado a (3.80):

$$\langle \hat{\mathbf{a}}_M \rangle = \langle \mathbf{a}_M \rangle + (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M)^{-1} \mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_h \langle \mathbf{a}_h \rangle \quad (3.82)$$

Como resultado de (3.81), las estimaciones del sensor se ven afectadas por el sesgo:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}} \rangle = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}_M \rangle - \mathbf{R}\mathbf{A} \langle \mathbf{a} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_h \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_{M,M'} - \mathbf{R}\mathbf{A}) \langle \mathbf{a} \rangle \\ \langle \mathbf{a}_h \rangle \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Este sesgo es un error sistemático, por lo que no puede eliminarse aumentando el número de medidas experimentales (Díaz-Santana et al. 2005). Como indica (3.83), el valor del sesgo que se produce al medir una determinada muestra de frentes de onda se puede evaluar siempre que se disponga de un modelo teórico o, en su defecto, de algún tipo de información acerca del valor esperado  $\langle \mathbf{a} \rangle$ . La alternativa más sencilla, que consiste en estimar  $\langle \mathbf{a} \rangle$  directamente a partir del promedio  $\langle \hat{\mathbf{a}} \rangle$  de los coeficientes obtenidos para la muestra, tiene el inconveniente de que estos resultados ya contienen los efectos del acoplamiento. En caso de que  $\langle \mathbf{a} \rangle = 0$ , como sucede con Kolmogorov, el sesgo es igual a cero.

Veamos ahora cómo el sensor y la estimación modifican el valor de la matriz de covarianzas  $\mathbf{B}_a$ . Para realizar este cálculo, se pueden usar estas propiedades:

$$\mathbf{B}_{Mx} = \mathbf{M}\mathbf{B}_x\mathbf{M}^T; \quad \mathbf{B}_{x+y} = \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y + \mathbf{B}_{x,y} + \mathbf{B}_{x,y}^T \quad (3.84)$$

Si se aplican estas expresiones al calcular las matrices de covarianza de las ecuaciones (3.62) de medida y (3.40) de estimación:

$$\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{a}}_M} = \mathbf{R}\mathbf{B}_m\mathbf{R}^T; \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{A}\mathbf{B}_a\mathbf{A}^T + \mathbf{C}_\eta + \mathbf{A}\mathbf{B}_{a,\eta} + (\mathbf{A}\mathbf{B}_{a,\eta})^T \quad (3.85)$$

Suponiendo que las fluctuaciones de los coeficientes del frente de ondas y el ruido no están correlacionados,  $\mathbf{B}_{a,\eta} = \langle [\mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle] \boldsymbol{\eta}^T \rangle = \mathbf{C}_{a,\eta} = 0$ , entonces (Bará et al. 2006b):

$$\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{a}}_M} = (\mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{B}_a(\mathbf{R}\mathbf{A})^T + \mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T \quad (3.86)$$

Esta ecuación indica que, incluso si se obvia el ruido, la matriz de covarianzas de los coeficientes estimados no es igual a la matriz de covarianzas original. Las desviaciones respecto de los valores originales dependen, de nuevo, de factores como la geometría del patrón de microlentes, el método de estimación o los polinomios usados. Además, estas desviaciones también dependen de la estadística de los coeficientes reales de la

población estudiada,  $\mathbf{B}_a$ . La consecuencia es que para evaluar la importancia de este fenómeno es necesario disponer de un modelo adecuado de la estadística real. La matriz de correlación del ruido se puede simplificar con las suposiciones de (2.40):

$$\mathbf{C}_\eta = \sigma_\eta^2 \mathbf{I}_{2N,2N} \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T = \sigma_\eta^2 \mathbf{R}\mathbf{R}^T \quad (3.87)$$

Consideremos ahora la matriz de covarianzas con  $\mathbf{R}_{LS}$ . Si se usa la matriz de acoplamiento (3.77), se aplica la descripción (3.78) para el vector de coeficientes de Zernike y para la matriz del sistema y se supone que la relación teórica usada en el cálculo de la matriz de estimación  $\mathbf{B}$  es la correcta, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\hat{a}_M} = & \mathbf{B}_{a_M} + \mathbf{B}_{a_M, a_h} (\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h)^T + \mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h \mathbf{B}_{a_M, a_h}^T \\ & + (\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h) \mathbf{B}_{a_h} (\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h)^T + \mathbf{R}_{LS} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}_{LS}^T \end{aligned} \quad (3.88)$$

Esta ecuación muestra que a los valores de la matriz de covarianzas de los  $M$  coeficientes estimados contribuyen las covarianzas de los modos  $a_h$  que se dejan sin estimar, debidamente transformadas por  $\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h$  (contribuyen tanto las covarianzas entre modos de alto orden como las covarianzas cruzadas con los modos de bajo orden). Por tanto, como consecuencia de la estimación aparecen correlaciones ficticias entre coeficientes estimados que no estaban presentes en la estadística original.

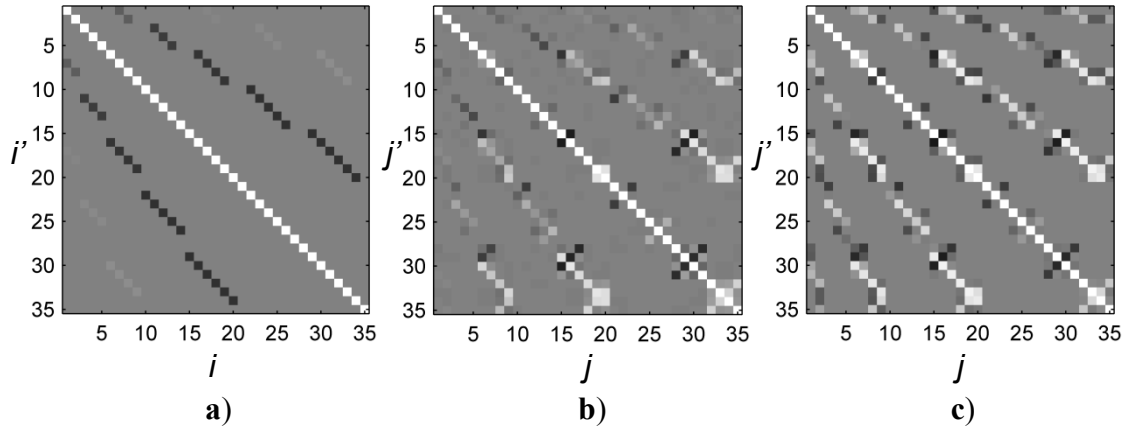
Bará et al. evaluaron la expresión (3.86) para la turbulencia atmosférica de Kolmogorov, la estimación de mínimos cuadrados, el error de estimación consistente en usar (3.46) y un patrón de  $N=101$  subpupilas circulares (Bará et al. 2006b). El uso de microlentes circulares permite obtener una expresión analítica para los elementos de la matriz de correlaciones de las medidas sin ruido,  $\mathbf{C}_\mu = \mathbf{A}\mathbf{C}_a\mathbf{A}^T$ , para la estadística de Kolmogorov (Voitsekhovich et al. 1998). Así se evita la aproximación de tener que evaluar  $\mathbf{C}_a$  con un número finito, aunque elevado, de coeficientes de Zernike. Este hecho supone una ventaja, ya que los modos de alto orden de esta estadística decaen lentamente, lo que provoca que en ocasiones haya que utilizar un valor de  $M'$  muy grande. Para el caso de subpupilas cuadradas, en el apartado 5.3.1 se muestra que para funciones de aberración isótropas, los elementos de  $\mathbf{C}_\mu$  se pueden expresar como integrales simples o dobles dependientes de la función de estructura de la aberración,  $D_W(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)$  [cf. (5.26) y (5.27)]. Para el modelo de Kolmogorov (y algunas variantes del mismo), estas integrales se pueden calcular numéricamente de forma sencilla.

Para ilustrar las alteraciones que puede sufrir la estadística de coeficientes debido a la acción del sensor y de la estimación, presentamos un cálculo similar al de Bará et

al., realizado con la red de microlentes de la figura 2.2b). En la figura 3.7a) se muestran los coeficientes de correlación de Pearson de los primeros 35 elementos del vector  $\mathbf{a}$  de Zernike de la estadística de Kolmogorov ( $\mathbf{B}_a = \mathbf{C}_a$ ). Estos coeficientes se definen como:

$$(\mathbf{R}_a)_{i,i'} = (\mathbf{B}_a)_{i,i'} / \left[ (\mathbf{B}_a)_{i,i} (\mathbf{B}_a)_{i',i'} \right]^{1/2} \quad (3.89)$$

Por su parte, en 3.7b) se representan los coeficientes de Pearson del vector  $\hat{\mathbf{a}}$  estimado con la configuración experimental mencionada, en ausencia de ruido y sin error de modelado en la estimación. Se comprueba que aparecen correlaciones ficticias no presentes en la estadística original. Su presencia puede llevar a conclusiones erróneas acerca del comportamiento de la matriz  $\mathbf{C}_a$  de coeficientes reales. En la figura no se tiene presente que en la práctica se dispone de un número  $K$  finito de realizaciones.



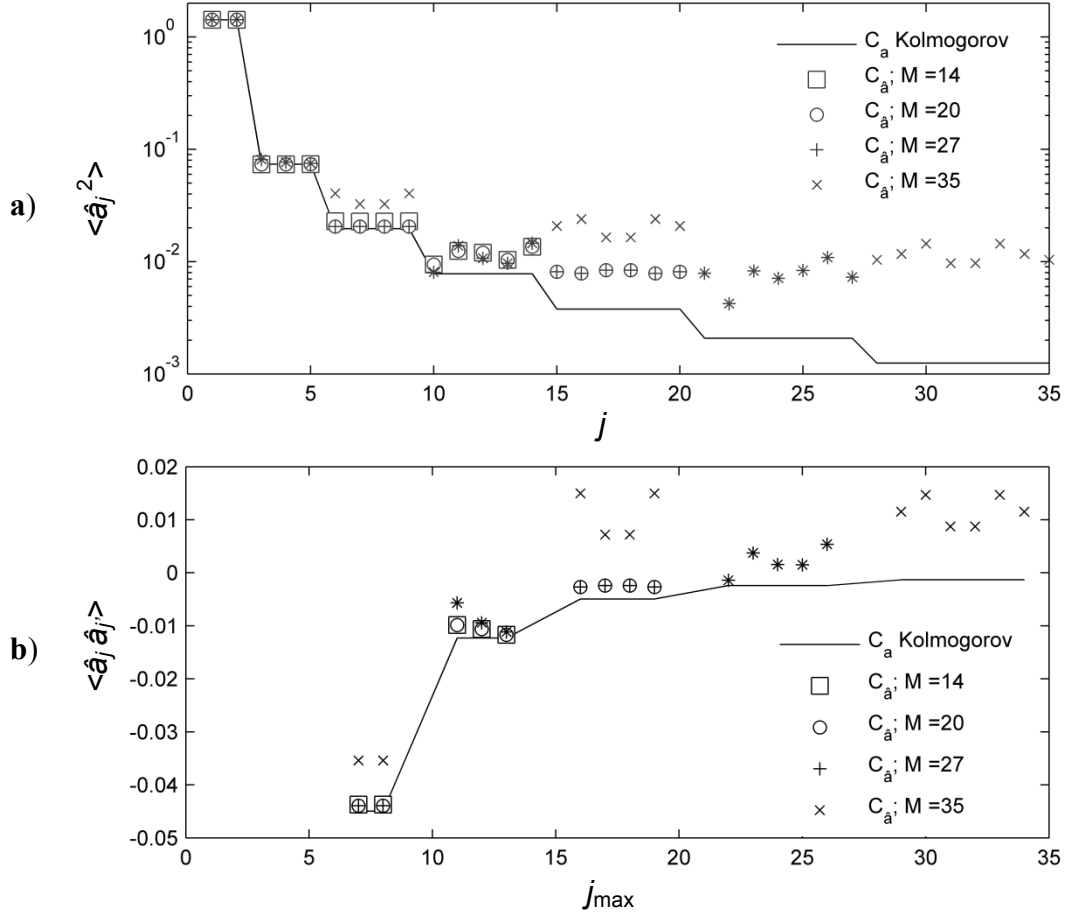
**Figura 3.7:** Coeficientes de Pearson de: a) los primeros 35 elementos del vector  $\mathbf{a}$  de los coeficientes de Zernike para la estadística de Kolmogorov; b) el correspondiente vector  $\hat{\mathbf{a}}$  de coeficientes estimados en ausencia de ruido con la red de la figura 2.2b), mínimos cuadrados y  $M=35$ ; c) la contribución del ruido al vector de coeficientes estimados. Los niveles de grises abarcan el intervalo  $[-1, 1]$ .

Al valor de  $\mathbf{C}_a$  de la figura 3.7b) falta añadirle la contribución del ruido del segundo sumando de (3.86). El efecto de la misma depende de la relación señal-ruido del sensor y puede introducir, además de sesgos en las correlaciones originales, correlaciones no presentes en la estadística real (Bará et al. 2006b). Por ejemplo, si se considera la expresión (3.87) y que se han usado mínimos cuadrados (Cubalchini 1979):

$$\mathbf{R}_{LS} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}_{LS}^T = \sigma_\eta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \quad (3.90)$$

Si, como en este caso, se supone que no existe error en el modelo de sensor usado en la estimación, el término de propagación de ruido es igual a  $\sigma_\eta^2 (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M)^{-1}$ . En general, las columnas de  $\mathbf{B}$  o de  $\mathbf{A}_M$  no son ortogonales para los polinomios de Zernike. Por tanto, ni  $\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M$  ni su inversa son diagonales. En consecuencia, aunque en (3.90) se ha supuesto

que  $\mathbf{C}_\eta$  es diagonal, en  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}$  aparecen nuevas correlaciones ficticias asociadas a la propagación del ruido. La figura 3.7c) incluye los coeficientes de Pearson de la propagación del ruido para la red de la figura 2.2b) cuando  $\mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T = \sigma_\eta^2 (\mathbf{A}_M^T \mathbf{A}_M)^{-1}$ .



**Figura 3.8:** Elementos  $(j, j')$  de la matriz de correlación de coeficientes estimados  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}$  para diferentes valores de  $M$ : a) elementos de la diagonal (varianzas:  $j = j'$ ); b) elementos con  $m_j = m_{j'}$  y  $n_j = n_{j'} + 2$ . La estadística real es de Kolmogorov, la red es la de la figura 2.2b), no se incluye el ruido y se usan mínimos cuadrados. Las ordenadas están en unidades de  $[\lambda/(2\pi)]^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ .

Veamos ahora el papel que juega el número  $M$  de modos estimados por mínimos cuadrados en los valores de los elementos de  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}$ . En la figura 3.8a) se comparan las varianzas del modelo de Kolmogorov con los valores de la diagonal de  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}$  que se obtienen con la red de la figura 3.7b), en ausencia de ruido y con  $M=14, 20, 27$  y  $35$  (órdenes  $n=4$  a  $n=7$ ). Para  $M=14$ , las varianzas estimadas siguen un comportamiento similar a las reales, reproduciendo su decaimiento con el orden radial. Evidentemente, no se obtiene información acerca de las varianzas de modos superiores a  $M$ , lo que supone un problema si el valor de este parámetro es bajo. Al aumentar el número de modos estimados a  $M=20$  se observa una mejora de la estimación de los valores de las

varianzas para  $n=3$ . No obstante, las varianzas del nuevo orden radial  $n=5$  no siguen el decaimiento teórico, sino que su valor es del mismo orden que el obtenido para  $n=4$ . Estimar hasta  $M=27$  no aporta ningún beneficio: hasta el orden  $n=5$  las varianzas son muy similares a las obtenidas con  $M=20$ ; para  $n=6$ , las varianzas no decaen, sino que mantienen la magnitud del orden anterior. La situación empeora con  $M=35$ : el *aliasing* introduce sobreestimaciones en las varianzas de los modos de bajo orden ( $n=3$  y  $n=5$ ).

En la figura 3.8b) se grafican las covarianzas  $\langle \hat{a}_j \hat{a}_{j'} \rangle$  entre pares de modos con la misma frecuencia angular ( $m_j = m_{j'}$ ) y órdenes radiales tales que  $n_j = n_{j'} + 2$ . En el eje de abscisas se representa el índice  $j_{\max}$ , igual al mayor de los índices de cada par:  $j_{\max} = \max(j, j')$ . Ahora la escala de las ordenadas no es logarítmica, a fin de recoger cambios de signo. En efecto, se observa que al usar un  $M=27$  o mayor se introducen importantes errores en los valores de las correlaciones, incluso cambios de signo.

Ocupémonos ahora de la matriz de momentos de segundo orden del error de estimación  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Dicha matriz se define como:

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \rangle = \langle [\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}][\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}]^T \rangle \quad (3.91)$$

Si se sustituye (3.76) en (3.91) y se supone que  $\mathbf{C}_{\mathbf{a}, \boldsymbol{\eta}} = 0$  (Díaz-Santana et al. 2005):

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_{M, M'} - \mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{C}_{\mathbf{a}}(\mathbf{I}_{M, M'} - \mathbf{R}\mathbf{A})^T + \mathbf{R}\mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{R}^T & (\mathbf{I}_{M, M'} - \mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{C}_{\mathbf{a}, \mathbf{a}_h} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{a}, \mathbf{a}_h}^T (\mathbf{I}_{M, M'} - \mathbf{R}\mathbf{A})^T & \mathbf{C}_{\mathbf{a}_h} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

La particularización de (3.92) para el caso de mínimos cuadrados sin error de modelado en la estimación es:

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}_h)\mathbf{C}_{\mathbf{a}_h}(\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}_h)^T + \mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{R}_{\text{LS}}^T & \mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}_h\mathbf{C}_{\mathbf{a}_h} \\ (\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{A}_h\mathbf{C}_{\mathbf{a}_h})^T & \mathbf{C}_{\mathbf{a}_h} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Una vez hallada la matriz  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , se puede calcular fácilmente el error cuadrático medio de la estimación,  $\langle \varepsilon^2 \rangle = \langle (\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}})^T (\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}) \rangle$ . Gracias a la ortogonalidad de los Zernikes, esta magnitud coincide con la definida en (3.54) (Díaz-Santana et al. 2005):

$$R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \langle [W(\mathbf{r}) - \hat{W}(\mathbf{r})]^2 \rangle d^2\mathbf{r} = \sum_{i=1}^M \langle (a_i - \hat{a}_i)^2 \rangle + \sum_{i=M+1}^{M'} \langle a_i^2 \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (3.94)$$

Es evidente también que  $\langle \varepsilon^2 \rangle = \text{tr}(\mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}})$ . Por tanto, a partir de (3.92) y para un método de estimación lineal  $\mathbf{R}$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon^2 \rangle &= \langle \varepsilon_r^2 \rangle + \langle \varepsilon_n^2 \rangle + \langle \varepsilon_t^2 \rangle \\
&= \text{tr} \left[ (\mathbf{I}_{M,M'} - \mathbf{R}\mathbf{A}) \mathbf{C}_a (\mathbf{I}_{M,M'} - \mathbf{R}\mathbf{A})^T \right] + \text{tr} [\mathbf{R} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}^T] + \sum_{i=M+1}^{M'} \langle a_i^2 \rangle
\end{aligned} \tag{3.95}$$

El término  $\langle \varepsilon_n^2 \rangle$  se debe a la propagación del ruido y depende de la geometría del sensor, de los polinomios y del método de estimación a través de  $\mathbf{R}$ . Por su parte,  $\langle \varepsilon_t^2 \rangle$  es un término ligado al truncamiento del vector de coeficientes totalmente independiente del patrón de muestreo y de la estimación. Este error es igual al  $\Delta_M$  definido en (3.32). Su valor es menor cuanto mayor sea el número  $M$  de modos estimados. Por último,  $\langle \varepsilon_r^2 \rangle$ , denominado “error restante” por Dai, depende del sensor, de la estadística de la población considerada, del método de estimación y de las funciones base (Dai 1996). Para el método de mínimos cuadrados el error restante empieza a crecer fuertemente con  $M$  a partir de un determinado valor, que depende del patrón de muestreo y de la estadística de las aberraciones.

Para la estimación por mínimos cuadrados sin error de modelado, a partir de (3.93) se llega a que:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = \text{tr} \left[ (\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h) \mathbf{C}_{a_h} (\mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}_h)^T \right] + \text{tr} [\mathbf{R}_{LS} \mathbf{C}_\eta \mathbf{R}_{LS}^T] + \sum_{i=M+1}^{M'} \langle a_i^2 \rangle \tag{3.96}$$

Nótese que  $\langle \varepsilon_r^2 \rangle$ , término debido al acoplamiento modal, depende de las correlaciones entre los coeficientes reales de los modos que no se reconstruyen.

Revisemos brevemente algunas simplificaciones del error de propagación del ruido  $\langle \varepsilon_n^2 \rangle$ . En primer lugar, si se usa el modelo de ruido dado por (2.40):

$$\langle \varepsilon_n^2 \rangle = \sigma_\eta^2 \text{tr} [\mathbf{R} \mathbf{R}^T] \tag{3.97}$$

Si, además, se considera el caso de la estimación por mínimos cuadrados por medio de (3.53) (con la posible inclusión de un error de modelado) (Southwell 1980):

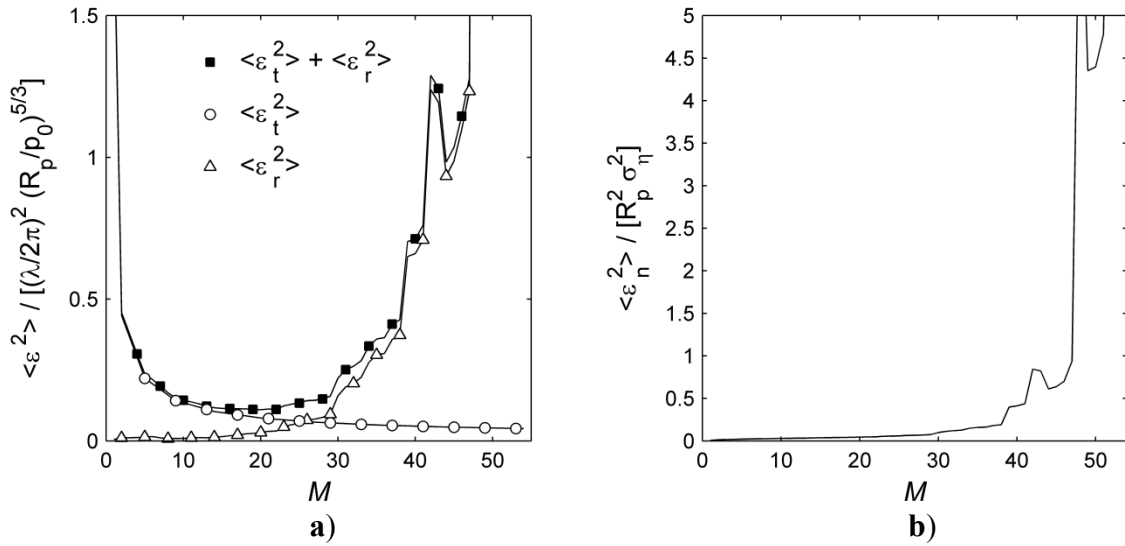
$$\langle \varepsilon_n^2 \rangle = \sigma_\eta^2 \text{tr} \left[ (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \right] \tag{3.98}$$

El término (3.98) se puede evaluar a fin de comparar la propagación del ruido a través de diferentes redes de microlentes. No obstante, hay que tener presente que la varianza  $\sigma_\eta^2$  del ruido depende de parámetros de la red, como el tamaño de las subaperturas (Díaz-Santana et al. 2005). Por otro lado, para una red dada el valor de (3.98) aumenta con  $M$  (Dai 1996).

Como se ha visto, el conocimiento de la estadística de la población de frentes de onda considerada no sólo permite la utilización de mejores estimadores de la aberración (o mejores métodos de control en óptica adaptativa), sino que además permite cuantificar el sesgo y el error cuadrático medio cometidos en la estimación. Dichos cálculos se pueden utilizar para optimizar determinados parámetros del sensor, como el número  $N$  de subaperturas empleadas, como el número  $M$  de modos reconstruidos o para elegir el criterio de estimación más adecuado. La condición necesaria para esta tarea es el conocimiento de la estadística de la población de frentes de onda de interés. Por ejemplo, para evaluar la expresión (3.95) es necesario conocer  $C_a$ . En óptica atmosférica y astronómica, en donde se dispone de modelos de validez contrastada, abundan los ejemplos de este tipo de cálculos. En particular, existen diferentes autores que acometen algunas de estas tareas para la estadística de Kolmogorov y la estimación por mínimos cuadrados (Lane y Tallon 1992, Takato et al. 1994, Dai 1996, Soloviev y Vdovin 2005). Por ejemplo, Lane y Tallon evalúan el comportamiento de  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  (salvo el término  $\langle \varepsilon_n^2 \rangle$  del ruido) tanto para polinomios de Zernike como para las funciones de KL atmosféricas. Encuentran que es posible hallar un  $M$  óptimo que minimice  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  para una red de microlentes dada y que las funciones de KL permiten alcanzar un error menor. De manera similar, Dai calcula usa (3.96) y (3.98) a fin de estudiar el comportamiento de los diferentes sumandos de  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  frente al número  $M$  de modos reconstruidos para un par de ejemplos de redes de microlentes. También utiliza tanto polinomios de Zernike como funciones de KL. Dai encuentra que en presencia de ruido de nuevo es posible hallar un  $M$  óptimo que minimice el error total para una red dada. Por su parte, Soloviev y Vdovin se centran en el estudio de la influencia de la regularidad de la distribución de las microlentes en  $\langle \varepsilon^2 \rangle$ : usando polinomios de Zernike, comparan la calidad de la estimación realizada con subaperturas distribuidas en redes hexagonales con la obtenida con una distribución aleatoria. Los autores encuentran que, tras optimizar  $M$  para cada red, con la distribución aleatoria se obtiene un menor error  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  y un valor mayor de  $M$  óptimo. Takato et al. usan  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  para optimizar el número  $N$  de subaperturas de sensores HS utilizados en telescopios astronómicos terrestres con diferentes fuentes luminosas y niveles de ruido.

Para ilustrar los resultados de los estudios descritos en el párrafo anterior, en la figura 3.9 se grafican los sumandos que contribuyen al error cuadrático de estimación frente al número  $M$  de modos estimados para la estadística de Kolmogorov, la red de la figura 2.2b) y la estimación por mínimos cuadrados. Se supone ausencia de error en el

modelo de sensor usado en la estimación y se usa el ordenamiento de los Zernikes dado en el apartado 3.1.2. Para evaluar el error restante  $\langle \varepsilon_r^2 \rangle$  es necesario determinar el número  $M'$  de modos que se usarán para representar al frente real en las simulaciones. Siguiendo las referencias, este valor se halla graficando el error restante frente a  $M'$  y tomando la abscisa a partir de la cual este error se satura (Dai 1996, Soloviev y Vdovin 2005). Se encuentra que  $M' = 495$ . Este valor es el número de columnas de la matriz  $\mathbf{A}$  que se usa para hallar las curvas de la figura 3.9, mientras que para cada  $M$  se ha de usar una matriz  $\mathbf{R}$  diferente. Se evalúan valores de  $M$ , en particular para  $M > 42$ , para los que el número de condicionamiento indica que la matriz  $\mathbf{A}$  es singular. Por tanto, la matriz de estimación se halla usando la descomposición en valores singulares.



**Figura 3.9:** Evaluación del error cuadrático medio de estimación  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  frente al número de modos reconstruidos  $M$  para la estadística de Kolmogorov, la red de la figura 2.2b) y estimación por mínimos cuadrados. En la figura a) se muestran los errores  $\langle \varepsilon_t^2 \rangle$  de truncamiento y  $\langle \varepsilon_r^2 \rangle$  restante, así como su suma, que alcanza un valor mínimo para  $M = 20$ . La figura b) muestra el crecimiento de la contribución del ruido con  $M$ .

La figura 3.9a) indica que el error cuadrático en ausencia de ruido se minimiza para  $M = 20$ . Por debajo de dicha cantidad, es el error de truncamiento el que domina, mientras que por encima de ella lo hace el error restante o de *aliasing*. Como se vio en la figura 3.8, para  $M = 35$  el *aliasing* ya provoca efectos perniciosos sobre la matriz de covarianzas de los coeficientes estimados. Nótese que las figuras 3.9a) y 3.9b) están en diferentes escalas. La suma de sus errores requiere conocer la relación señal-ruido de los coeficientes de Zernike.



## Capítulo 4

# ESTADÍSTICA DE LAS ABERRACIONES OCULARES

En este capítulo se recoge el estado en el que se encuentra el conocimiento de la estadística espacial y de la dinámica temporal de las aberraciones monocromáticas del ojo humano. Tras caracterizar el sensor HS en el capítulo 2 y el proceso de estimación en el capítulo 3, falta reseñar y discutir la información de la que se dispone acerca de las propiedades de las aberraciones oculares de alto orden. A pesar de que existen bastantes artículos dedicados a describir las características de las aberraciones estimadas en el laboratorio usando sensores de frente de onda, no se dispone todavía de modelos consolidados, tanto en lo que se refiere a su comportamiento estadístico en poblaciones de ojos (Devaney et al. 2008) como a su dinámica temporal (Leahy 2010).

La sección 4.1 revisa los métodos y resultados obtenidos en el estudio de la estadística espacial de la población de ojos de personas con visión normal. También se comentan los cambios más relevantes que se producen en las aberraciones de una población con factores tales como la acomodación o la excentricidad en retina. En su mayoría, los trabajos existentes se apoyan en el uso de los coeficientes de Zernike estimados con un sensor de frente de ondas. En ellos se caracteriza la estadística de las aberraciones a partir de los momentos de primer y segundo orden de los coeficientes de Zernike en cada muestra de ojos. Por último, se mencionan las propuestas de modelos de esta población más utilizadas en la literatura, el modelo de Thibos y el de la turbulencia atmosférica de Kolmogorov, así como sus marcadas diferencias.

La sección 4.2 se centra en las propiedades temporales de las aberraciones de ojos individuales. Se comentan los diferentes procedimientos usados para estudiar dichas fluctuaciones y su contenido espectral en frecuencias y los motivos por los que su

caracterización resulta de interés. También se mencionan las causas fisiológicas que se barajan como responsables de la variabilidad temporal.

En la sección 4.3 se aborda la influencia de los movimientos oculares en la estimación del frente de onda y cómo se han de modificar las expresiones del capítulo 3 para su inclusión. Se recogen los resultados de un trabajo relacionado con el tema del que es coautor el doctorando (Arines et al. 2009). En dicho artículo se usan modelos hipotéticos de ojos basados en hallazgos experimentales de otros autores. A partir de dichos modelos, se realizan simulaciones que muestran los aumentos en la variabilidad de los coeficientes estimados y en el error de estimación que se producen si no se compensan los efectos de los movimientos.

Finalmente, en la sección 4.4 se realizan algunos desarrollos originales, cálculos y observaciones usando los dos modelos más empleados para describir la estadística de la población de ojos normales: el de Kolmogorov y el de Thibos. En particular, revisamos en profundidad la metodología usada en un artículo de la literatura para estudiar la validez del modelo de Kolmogorov en poblaciones de ojos jóvenes (Cagigal et al. 2002), lo que nos lleva a cuestionar las conclusiones de dicho estudio.

## **4.1 Estadística de poblaciones de ojos**

Tras la introducción del HS y de otros sensores de alta resolución en el campo de la aberrometría ocular, diversos autores realizaron trabajos orientados al estudio de las aberraciones oculares en poblaciones de ojos (Porter et al. 2001, Castejón-Mochón et al. 2002, Thibos et al. 2002b, Thibos et al. 2002c). Estos primeros trabajos se centraron en el estudio de las aberraciones en la línea de visión de ojos de personas adultas con “visión normal”, esto es, que no padecen ninguna patología ni han sido sometidos a cirugía ocular. Como se ha comentado, la caracterización adecuada de la estadística de esta población es un paso previo necesario antes de la caracterización de las aberraciones de una muestra con alguna patología. Los estudios mencionados difieren en algunos aspectos relacionados con la muestra de ojos y la metodología empleadas: Porter et al. consideraron individuos con un rango de edad amplio (de 21 a 65 años), mientras que Castejón-Mochón et al. y Thibos et al. se centraron en ojos jóvenes; además, en los dos primeros estudios se trabajó con la acomodación sin paralizar y sin corregir los errores refractivos, al contrario que en los estudios de Thibos et al. Todos estos autores analizaron la estadística de las aberraciones oculares utilizando

directamente los coeficientes de Zernike estimados,  $\hat{\mathbf{a}}$ . Estos coeficientes se obtuvieron por mínimos cuadrados a partir de los datos proporcionados por sensores HS.

Los estudios coinciden en destacar la fuerte variabilidad que presentan los coeficientes de Zernike estimados  $\hat{a}_n^m$  entre los distintos ojos de la muestra. Además, los valores medios de casi todos los modos analizados no son significativamente diferentes de cero. La principal excepción se puede encontrar en la aberración esférica,  $\hat{a}_4^0$  (Porter et al. 2001, Thibos et al. 2002b). La cuantificación de la importancia de las aberraciones se suele realizar por medio de los valores de  $\langle \|\hat{\mathcal{W}}\| \rangle$ ,  $\langle \|\hat{\mathcal{W}}\|^2 \rangle$  o de magnitudes similares, que se calculan sin incluir los términos de prisma (en esas condiciones, la segunda magnitud es  $\Delta_2$ ). Castejón et al. afirman que  $\langle \|\hat{\mathcal{W}}\| \rangle$  crece en su estudio con el cuadrado del diámetro de pupila. Por su parte, el peso de los modos individuales se cuantifica a través de su contribución a las magnitudes anteriores; por ejemplo, por medio de  $\langle \hat{a}_j^2 \rangle$  para el caso de  $\langle \|\hat{\mathcal{W}}\|^2 \rangle$ . Las aberraciones de mayor magnitud son las de orden  $n=2$ , el desenfoque y los astigmatismos: en el estudio de Castejón et al. son responsables del 90.8 % de los  $1.49 \mu\text{m}$  que vale  $\|\hat{\mathcal{W}}\|$  en promedio para una pupila de  $D_p = 5 \text{ mm}$ . Por lo que respecta a los modos de órdenes superiores, su importancia decae con el orden radial  $n$ . Thibos et al. hallaron que dicho decaimiento puede ser descrito por la siguiente ley exponencial (Thibos et al. 2002c):

$$\langle \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2 \rangle \equiv \sum_{m=-n}^n \langle (\hat{a}_n^m)^2 \rangle = b_{\text{Th}} \exp(-c_{\text{Th}} n) \quad (4.1)$$

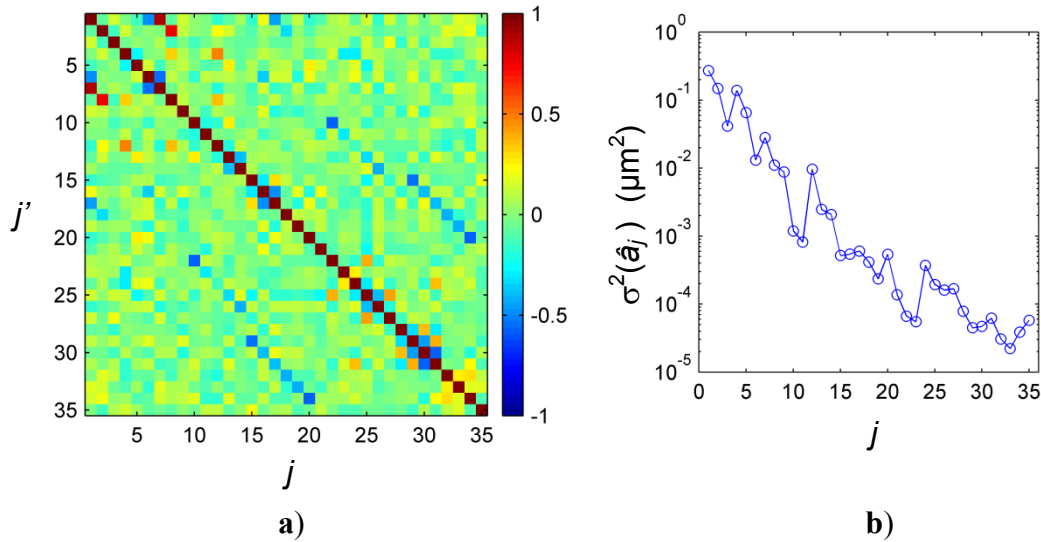
Aquí  $\langle \|\hat{\mathcal{W}}_n\|^2 \rangle$  es el valor esperado de la norma al cuadrado de los  $n+1$  modos de cada orden radial. El ritmo de decrecimiento  $c_{\text{Th}}$  varía ligeramente con el diámetro de pupila y está contenido en el intervalo  $[1.1, 1.8]$ . También se encontró que el peso de los modos de alto orden crece cuanto mayor es la pupila (Castejón-Mochón et al. 2002).

Otro de los resultados recogidos en los estudios mencionados es cierta tendencia de la función de aberración hacia la simetría especular o bilateral en torno al eje vertical. Esto es, si  $\hat{\mathcal{W}}^{\text{le}}, \hat{\mathcal{W}}^{\text{re}}$  denotan las funciones de aberración de los ojos izquierdo y derecho de una persona, existe cierta tendencia a que  $\hat{\mathcal{W}}^{\text{le}}(x, y) \cong \hat{\mathcal{W}}^{\text{re}}(-x, y)$ . Por tanto, las aberraciones de los dos ojos de cada persona tienen un cierto grado de correlación: los modos de Zernike simétricos respecto al eje vertical y tienden a estar correlacionados positivamente, mientras que los antisimétricos lo están negativamente (Thibos et al. 2002c). Al estudiar la estadística de una muestra de ojos, la opción preferible para evitar la influencia de este hecho es tratar cada tipo de ojo por separado (ANSI 2004).

Thibos et al. usaron sus medidas, tomadas para una muestra de 200 ojos pertenecientes a 100 individuos y una pupila con  $D_p = 6$  mm, para realizar una propuesta de modelo de la estadística espacial de las aberraciones de la población de ojos de personas jóvenes con visión normal (Thibos et al. 2002b). En su propuesta, los coeficientes de Zernike siguen un modelo gaussiano multivariable cuyos valores medios y cuya matriz de covarianzas se igualan a las estimaciones experimentales. Por tanto:

$$\langle \hat{\mathbf{a}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{a}} \rangle \quad \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{a}} = \mathbf{B}_{\mathbf{a}} \quad (4.2)$$

El uso del modelo gaussiano viene sugerido por los histogramas de los coeficientes individuales, a los que en su mayoría se puede ajustar satisfactoriamente una gaussiana. Como el modelo es gaussiano, se puede usar la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianzas del vector de coeficientes de Zernike para calcular realizaciones particulares de dicho vector (Schwiegerling 2009).



**Figura 4.1:** a) Coeficientes de correlación de Pearson  $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$  de los coeficientes de Zernike encontrados por Thibos et al. para una muestra de ojos de personas jóvenes con visión normal y una pupila de 6 mm. b) Gráfica de la varianza  $\sigma^2(\hat{a}_j)$  de cada coeficiente estimado  $j$ . Las dos gráficas han sido obtenidas a partir de los datos publicados por Thibos (Thibos 2009).

La matriz experimental  $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$  de coeficientes de correlación de Pearson encontrada por Thibos se muestra en la figura 4.1a). Los valores más destacados de las correlaciones se producen bien entre modos del mismo orden radial  $n$  (cerca de la diagonal de la matriz) o bien entre modos de la misma frecuencia  $m$  (por ejemplo, entre el coma vertical y el prisma vertical, entre el coma horizontal y el prisma horizontal o entre la aberración esférica y el desenfoque); véanse las figuras 3.3a) y 3.3b). En la figura 4.1b) se muestran las varianzas  $\langle [\hat{a}_j - \langle \hat{a}_j \rangle]^2 \rangle$  de los modos estimados.

En el año 2006 se publicó un estudio que recoge datos de aberraciones de alto orden procedentes de 10 laboratorios, entre los que se encuentran los datos de los cuatro estudios anteriores y de algunas clínicas de cirugía refractiva (Salmon y van de Pol 2006). La muestra de 2560 ojos abarca un amplio rango de edades y errores refractivos. Además, se usaron diferentes sensores HS y protocolos de medida. Los resultados, centrados en el análisis de los valores medios  $\langle \hat{a}_j \rangle$  y en la contribución de cada modo a  $\langle \|\hat{W}\| \rangle$  (a través de  $\langle \|\hat{a}_j\| \rangle$ ), muestran un buen acuerdo con los obtenidos en los estudios precedentes: especial relevancia de los modos de tercer orden y la aberración esférica, decaimiento de  $\langle \|\hat{a}_j\| \rangle$  con el orden radial, etc. No obstante, se observa cierta variabilidad entre los resultados de los diferentes laboratorios para los modos de tercer orden y la aberración esférica. Los autores señalan que los resultados son muy similares para los datos de los laboratorios que aportan más ojos, en los que se usó el mismo HS.

Otros artículos han abordado las modificaciones que se producen en las aberraciones de una población de ojos ante cambios en factores tales como el estado de acomodación (Cheng et al. 2004a), la excentricidad en retina (Navarro et al. 1998, Lundström et al. 2009) o la edad (McLellan et al. 2001). En estos estudios se recogen, principalmente, los cambios que se producen en los promedios poblacionales de los coeficientes de Zernike, la correlación o dependencia de algunos coeficientes con la magnitud modificada (respuesta acomodativa, ángulo de excentricidad, etc.) y el efecto de dicha magnitud en la contribución a  $\langle \|\hat{W}\| \rangle$  de cada modo o conjunto de modos. Por ejemplo, Cheng et al. encontraron que los cambios más pronunciados de las aberraciones con la acomodación se producen para el coeficiente de Zernike de la aberración esférica, cuyo valor se modifica proporcionalmente a la respuesta acomodativa. Otros modos, como los astigmatismos o el coma, también varían con la acomodación, pero su valor a veces se incrementa y a veces disminuye dependiendo del ojo considerado. De hecho, los promedios entre los ojos de la muestra de las diferencias de los coeficientes de Zernike con y sin acomodación no son significativamente diferentes de cero, excepto para la aberración esférica. Los resultados de Cheng et al. con la acomodación relajada coinciden con los de los estudios ya mencionados.

Otro trabajo que estudia la estadística espacial de las aberraciones de una muestra de ojos jóvenes es el de Cagigal et al. (Cagigal et al. 2002). Este estudio se diferencia de los anteriores en que, en lugar de utilizar los momentos de los coeficientes de Zernike estimados, la atención ahora se centra en diferentes magnitudes estadísticas de  $\hat{W}(\mathbf{r})$ . Al igual que en los artículos anteriores, los efectos de la medida de los centroides y la

estimación del frente de ondas no se tienen presentes, sino que se supone implícitamente que la aberración estimada representa adecuadamente a la aberración real. El trabajo concluye que la función de aberración para esta población de ojos es un proceso homogéneo y utiliza el espectro de potencias de  $\hat{W}(\mathbf{r})$  para afirmar que sigue la estadística de Kolmogorov. En el apartado 4.4.1 se realizan desarrollos y observaciones adicionales acerca de la metodología y las conclusiones de este estudio.

Devaney et al. han señalado que los modelos de Kolmogorov y Thibos muestran comportamientos muy diferentes (Devaney et al. 2008). Por ejemplo, el ritmo de decrecimiento de las varianzas asociadas a cada modo con el orden radial es mayor en el caso del modelo de Thibos. Además, las funciones de aberración generadas por el modelo de Thibos tienen unos valores esperados  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle$  y unas varianzas  $\sigma_w^2(\mathbf{r})$  que no son constantes en el plano de pupila. Respecto a la dependencia de  $\langle \|\hat{W}\| \rangle$  sin considerar prismas con  $R_p^2$ , encontrada en varios estudios de poblaciones de ojos, los autores señalan que dicha dependencia es más fuerte que el factor  $R_p^{5/6}$  correspondiente a  $\Delta_2^{1/2}$  para Kolmogorov.

## 4.2 Dinámica temporal de las aberraciones oculares

Los trabajos relacionados con la dinámica de las aberraciones oculares estudian las fluctuaciones temporales de las mismas a corto plazo, su contenido espectral en frecuencias y las causas que provocan dichas variaciones. Estos trabajos son útiles para el estudio de los requerimientos y del comportamiento de sistemas de óptica adaptativa en tiempo real, para la mejora de las estimaciones de las aberraciones oculares o para conocer el impacto de la dinámica en la realización de las tareas visuales (Hofer et al. 2001a, Hofer et al. 2001b, Diaz-Santana et al. 2003). También proporcionan información para la elaboración de modelos teóricos de dicha dinámica, que pueden usarse en la realización de simulaciones, en el testado de montajes o componentes ópticos o en la mejora de los procedimientos de cirugía refractiva (Leahy 2010). Por último, es posible que algunos de estos estudios tengan relevancia clínica, como los asociados a la dinámica de las aberraciones de la lágrima (Li y Yoon 2006).

El desenfoque fue la primera aberración cuya dinámica se estudió en detalle. En las señales de acomodación se observan fluctuaciones temporales de hasta 0.5 D cuando el objeto de fijación se mantiene estable (Charman y Heron 1988). El espectro de potencias temporal de la acomodación se caracterizó por primera vez usando la señal

proporcionada por un optómetro en el infrarrojo (Campbell et al. 1959). Se observó que este espectro decae con la frecuencia, estando la mayor parte de la potencia contenida en las frecuencias inferiores a 5 Hz. Dentro de dicho rango, normalmente se distingue entre la banda de baja frecuencia situada por debajo de 0.5 Hz y las componentes de alta frecuencia de 1 – 2 Hz. Se ha observado que la magnitud de las microfluctuaciones de la acomodación cambia con el esfuerzo acomodativo promedio, entre otros muchos factores. Así, cuando se varía la vergencia de un objeto visto a través de un sistema de badal, de modo que su tamaño angular no cambie, se produce un aumento de las fluctuaciones al pasar del punto remoto a la mitad del rango acomodativo y un decrecimiento cerca del punto próximo (Charman y Heron 1988, Leahy 2010).

Los estudios de la dinámica de las aberraciones de alto orden no aparecieron hasta los años 2000 (Hofer et al. 2001a), a la espera de sensores de frente de onda que proporcionasen resoluciones espaciales y temporales suficientemente altas. Habitualmente en estos trabajos se estudia la evolución temporal de magnitudes tales como la norma de la aberración estimada,  $\|\hat{W}\|$ , o como los diferentes coeficientes de Zernike  $\hat{a}_j$ . Hofer et al. observaron que las fluctuaciones asociadas al desenfoque eran las de mayor magnitud, pero que en todos los coeficientes estimados se producían cambios dinámicos. Obtuvieron que los espectros de potencias vinculados a cada orden radial (obtenidos promediando los espectros de cada modo del orden) tenían anchos de banda similares a los espectros de otros órdenes para todos los ojos medidos y decaían siguiendo leyes de potencias de exponente 1.33. Otros autores han estimado exponentes similares, en el rango 1.2 – 1.5, tanto para aberraciones particulares como para la norma de la aberración estimada sin pistón ni prismas (Díaz-Santana et al. 2003, Hampson et al. 2005, Leahy 2010). No obstante, los cambios de las fluctuaciones de desenfoque con la vergencia del objeto de fijación pueden afectar al exponente o hacer conveniente el uso de leyes de potencias diferentes en distintos rangos de frecuencias (Mira-Agudelo et al. 2009, Leahy 2010).

Hofer et al. también estimaron la componente de más alta frecuencia que eran capaces de medir en su sistema. Para ello compararon el espectro de potencias de la norma de las aberraciones oculares con el espectro de la norma medida para un ojo artificial. El ojo artificial estaba formado por una lente y una superficie difusora, por lo que su aberración era estática y las fluctuaciones se producían debido a la propagación del ruido fotónico y electrónico. Obtuvieron una frecuencia máxima de 5 – 6 Hz,

aunque estudios posteriores han elevado este valor por encima de los 30 Hz (Díaz-Santana et al. 2003, Mira-Agudelo et al. 2009).

Varios autores han sugerido sustituir el uso de los espectros de potencias por representaciones conjuntas en el tiempo y en la frecuencia, como el espectrograma o las distribuciones tipo Wigner-Ville (Iskander et al. 2004, Leahy 2010). La variación del contenido espectral con el tiempo que se observa al usar estas representaciones con las señales de las aberraciones y de la acomodación medidas en series de cierta duración muestra la insuficiencia del espectro de potencias y está ligada a la no estacionariedad de dichos procesos (la estacionariedad es el equivalente temporal de la homogeneidad espacial definida en el apartado 3.1.1).

Las causas de las fluctuaciones temporales de las aberraciones oculares no se han determinado por completo. En su estudio, Hofer et al. usaron las medidas del ojo artificial para descartar que el espectro de potencias ocular esté dominado por la propagación del ruido del sensor. También relativizaron un posible impacto de las traslaciones transversales de la pupila, asociadas a inestabilidades de la cabeza de las personas o a pequeños movimientos de fijación. Para ello calcularon numéricamente las fluctuaciones que se producirían en la norma de la aberración expresada respecto al sensor en presencia de una aberración estática en la pupila ocular (igual a una de las aberraciones estimadas en los experimentos) cuando se aplican una serie de traslaciones a dicha pupila respecto del sensor.

Usando el análisis de coherencia, algunos autores han encontrado cierta correlación entre la dinámica de las aberraciones de alto orden y las señales cardiorrespiratorias del pulso y de la variabilidad de la frecuencia cardíaca, relacionada con la respiración (Zhu et al. 2004, Hampson et al. 2005). Estos trabajos se inspiraron en estudios previos que habían ligado: a) las componentes del espectro del pulso cercanas a la frecuencia cardíaca con las componentes de alta frecuencia de la señal de acomodación y b) las componentes del espectro de la señal de variabilidad de la frecuencia cardíaca asociadas a la frecuencia de respiración con picos de baja frecuencia del espectro de la acomodación (Winn et al. 1990, Collins et al. 1995).

La dinámica asociada a cambios en la lágrima ha sido otro de los fenómenos estudiados. Usando diferentes técnicas, varios estudios han hallado que su contribución a la dinámica de las aberraciones es relevante (Gruppetta et al. 2005, Li y Yoon 2006). En particular, Gruppetta et al. emplearon un sensor de curvatura, mientras que Li y



Yoon usaron un sensor HS con un patrón de microlentes de elevada densidad y un estimador zonal (la estimación modal usando polinomios de Zernike hasta un orden tan elevado como  $n=10$  no fue suficiente para representar adecuadamente las aberraciones de alta frecuencia espacial estimadas con el algoritmo zonal).

Los parpadeos son un factor que afecta de manera significativa a las magnitudes estudiadas en los trabajos de dinámica. En particular, provocan cambios de gran amplitud en las señales de los coeficientes de Zernike de las aberraciones, especialmente visibles en las de bajo orden (Iskander et al. 2004). Su presencia aumenta el valor del espectro de potencias de la aberración en cierto rango de frecuencias. Las medidas tomadas durante los parpadeos se suelen considerar como datos espurios. Algunos autores optan por evitarlos usando series de medidas de corta duración, del orden de 5 s. No obstante, esto limita la resolución de los espectros de potencias obtenidos e impide considerar las componentes de baja frecuencia de las aberraciones (Collins et al. 1995). Su detección se puede realizar buscando cambios fuertes y rápidos en las señales de las aberraciones de bajo orden o bien manualmente, revisando las imágenes proporcionadas por el sensor de frente de ondas (Iskander et al. 2004, Leahy 2010). Si se usan técnicas basadas en la transformada de Fourier, es necesario sustituir los datos detectados por valores interpolados o filtrar las señales (Iskander et al. 2004).

### **4.3 Transformaciones en el sistema de referencia de la pupila**

En aberrometría ocular existen diferentes situaciones en las que es interesante conocer las modificaciones que se producen en la representación en polinomios de Zernike de la aberración ante transformaciones en el sistema de referencia respecto al que estos están expresados. Estas transformaciones consisten en traslaciones, rotaciones o cambios de escala de las coordenadas de los polinomios y afectan a los valores del vector de coeficientes.

Un ejemplo típico de estas situaciones surge como resultado de los movimientos oculares que tienen lugar durante una serie de medidas de un ojo individual. El ojo humano no está nunca en reposo, ni siquiera cuando las personas fijan su mirada en un estímulo. Incluso entonces existen los movimientos de fijación, cuyo cometido principal es impedir que la percepción del entorno desaparezca debido a la adaptación neuronal (Martinez-Conde et al. 2004). Además, se pueden producir pequeños movimientos de la cabeza, a pesar de la utilización de métodos de estabilización. En ocasiones, las medidas

y estimaciones se realizan sin considerar las traslaciones y rotaciones ligadas a estos movimientos. Se usa entonces un sistema de referencia fijo respecto al sensor y se confía en la habilidad del observador para mantener la fijación. Con este procedimiento, las traslaciones transversales de la pupila provocan que cada microlente del sensor muestree en cada medida regiones de la pupila ocular ligeramente diferentes de las que nominalmente le corresponden. Los coeficientes así estimados son diferentes de los referidos a un sistema solidario al centro de la pupila ocular.

Otra transformación de interés son los cambios de escala de las coordenadas de los polinomios asociados a variaciones en el tamaño de la pupila. Esta situación es típica, por ejemplo, de estudios de las aberraciones de poblaciones de ojos (Campbell 2003). Con frecuencia, los coeficientes de Zernike obtenidos por diferentes laboratorios se estiman usando pupilas de diferentes tamaños, lo que impide su comparación directa. Es necesario entonces referirlos a una pupila común, preferiblemente la de menor tamaño para evitar extrapolar las soluciones a regiones de las que no se dispone de información. También es necesario aplicar cambios de escala para evaluar las aberraciones o la calidad óptica de un ojo para un tamaño de pupila inferior al usado en la estimación. En esta situación, lo ideal es considerar también la traslación que se produce en la posición del centro de la pupila (Lundström y Unsbo 2007).

Por supuesto, si se dispone de acceso a las imágenes del sensor o a los datos de los desplazamientos de los centroides en todas las microlentes, se puede optar por reestimar los coeficientes de Zernike directamente en el sistema de referencia apropiado en cada medida en lugar de transformar los coeficientes ya estimados (Campbell 2003). Ambos métodos requieren de información acerca de la transformación de los sistemas de referencia y producen resultados equivalentes para transformaciones conformales (Arines et al. 2008). Si la nueva pupila no está contenida en la inicial, es preferible reestimar los coeficientes, ya que transformar los coeficientes estimados sólo extrapola la solución inicial.

El problema de la transformación de los coeficientes de Zernike ante los cambios de coordenadas de los polinomios se puede formular matricialmente. Sea  $\mathbf{a}$  el vector de coeficientes de la aberración cuando los polinomios de Zernike se refieren a un sistema de coordenadas  $XY$ . Sea  $\mathbf{a}'$  el vector de la misma aberración respecto de otro sistema  $X'Y'$ , relacionado con  $XY$  por una de las transformaciones comentadas. Calcular  $\mathbf{a}'$  a partir de  $\mathbf{a}$  es equivalente a hallar la matriz  $\mathbf{T}$  tal que (Bará et al. 2006a):

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}\mathbf{a} \quad (4.3)$$

Varios autores han proporcionado diferentes métodos de cálculo de  $\mathbf{T}$  para las distintas transformaciones. La rotación es el caso más sencillo: los modos con simetría rotacional ( $m=0$ ) permanecen invariantes; para el resto, cada par  $[a_n^m \ a_n^{-m}]^T$  se transforma de acuerdo con una matriz de rotación de ángulo  $|m|\alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación (Bará et al. 2000). Las matrices para las traslaciones transversales se pueden calcular usando el desarrollo de Taylor (ANSI 2004). También existe un método numérico de cálculo de  $\mathbf{T}$ , que es aplicable a todo tipo de transformaciones lineales entre sistemas, a diferentes definiciones de los Zernikes y a otros polinomios (Bará et al. 2006a). Campbell presentó un procedimiento analítico para transformar los coeficientes de Zernike entre pupilas de diferente tamaño, que fue extendido a otras transformaciones por Lundström y Unsbo (Campbell 2003, Lundström y Unsbo 2007).

Es interesante recoger a qué modos  $a_{n'}^{m'}$  se acopla cada modo  $a_n^m$  para las transformaciones lineales comentadas. En todas ellas se cumple que  $n' \leq n$ . Para un reescalado simétrico, cada coeficiente se acopla a sí mismo y a otros con  $n' < n$  y  $m' = m$ . En las traslaciones, el coeficiente del modo original no varía y se acopla a otros con  $n' < n$ . Además, el acoplamiento depende de la dirección del descentramiento. Las rotaciones se comportan del modo ya descrito.

La formulación matricial puede ser usada para estudiar el impacto de descentramientos o rotaciones en métodos de compensación ideal de las aberraciones oculares (Bará et al. 2000, Guirao et al. 2001). También se puede utilizar en simulaciones destinadas a evaluar el efecto de la no consideración de los movimientos oculares en la estimación de las aberraciones. Precisamente ese es el propósito de un trabajo en el que participó el autor de esta tesis, cuyos métodos y resultados se presentan a continuación (Arines et al. 2009).

Se comenta en primer lugar el proceso seguido para hallar los coeficientes  $\mathbf{a}$  de Zernike empleados en la simulación para representar a las aberraciones oculares. Al igual que en otros trabajos del área (Hofer et al. 2001a), se consideran aberraciones estáticas y se somete a la pupila ocular a traslaciones transversales en relación con el sensor. Este hecho hace que se produzcan fluctuaciones en la aberración expresada respecto a un sistema de referencia fijo en el sensor. No obstante, en este estudio se desea incluir los efectos de la estimación, como la representación por un número finito de Zernikes y el acoplamiento modal. Por ello no basta con usar datos de aberraciones

$\hat{\mathbf{a}}_M$  estimadas en el laboratorio para construir el vector de coeficientes reales  $\mathbf{a}$  de la simulación, sino que es necesario modelar el comportamiento de coeficientes de órdenes más elevados que los usados en las estimaciones (cf. el apartado 3.3.2).

Para generar los dos ojos hipotéticos usados en las simulaciones se usó la observación de Thibos et al. de que el promedio  $\langle \|\hat{W}_n\|^2 \rangle$  en una población de ojos jóvenes de la norma al cuadrado de la aberración asociada a cada orden radial decrece exponencialmente con  $n$ , como indica la ecuación (4.1). Se comprobó que este comportamiento también se produce para las aberraciones individuales estimadas en nuestro laboratorio para dos ojos; para demostrarlo, se ajustaron exponenciales  $\|W_n\|^2 = b_{Th} \exp(-c_{Th} n)$  a las normas experimentales  $\|\hat{W}_n\|^2$  de cada ojo. Los valores del exponente  $c_{Th}$  obtenidos estaban dentro del rango mencionado por Thibos et al. Los coeficientes  $\mathbf{a}$  de cada ojo hipotético se generaron aleatoriamente en pupilas de 5 mm usando un modelo gaussiano multivariable con valores medios iguales a cero, no correlación entre modos diferentes y varianzas dadas por el ajuste de cada ojo:  $\|W_n\|^2 / (n+1)$  (se asignaron varianzas iguales a todos los modos del mismo orden  $n$ ). Se supuso que el decaimiento exponencial de las varianzas es válido para órdenes muy superiores a los verificados experimentalmente: se usó un orden máximo de 12 ( $M'=90$  modos) en la generación de los ojos de la simulación. Nótese que el uso de la matriz de covarianzas experimental de Thibos et al., recogida en la figura 4.1a), en un modelo de este tipo requeriría de algún tipo de suposición acerca del comportamiento de los términos cruzados para modos de alto orden. En el apartado 4.4.2 se usará de nuevo un modelo muy similar al ahora propuesto. Como cada ojo se generó usando un valor de  $c_{Th}$  diferente, las aberraciones de alto orden tienen diferente peso en ellos.

Una vez generados los coeficientes  $\mathbf{a}$ , que describen la aberración estática de cada ojo respecto de la pupila ocular, se calculan los valores del vector  $\mathbf{a}'$  en el sistema  $X^*Y^*$  fijo del sensor. Para ello se aplica (4.3) para cada traslación  $\mathbf{b}$  de interés:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}(\mathbf{b})\mathbf{a} \quad (4.4)$$

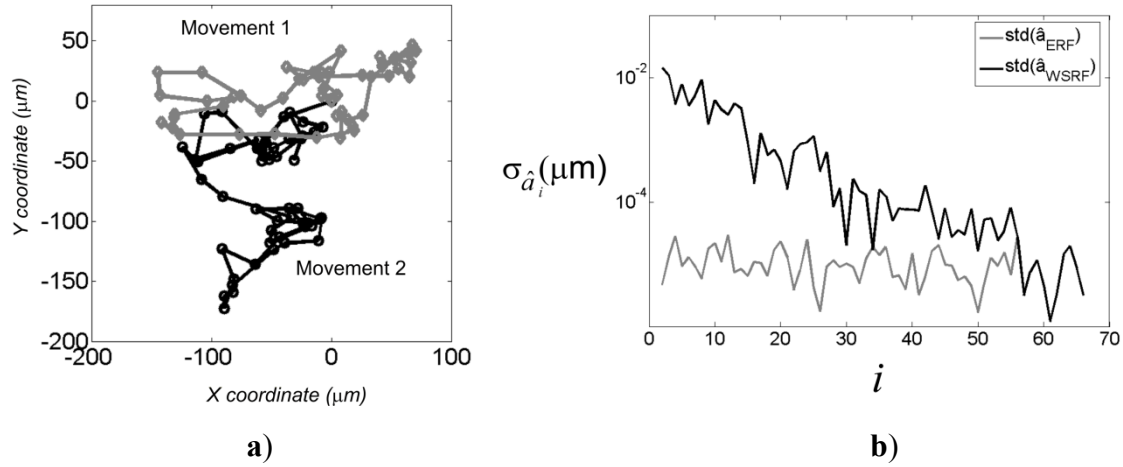
Si  $\mathbf{A}'$  es la matriz del sensor construida respecto al sistema de referencia  $X^*Y^*$  (que es una matriz de elementos no aleatorios, a diferencia de  $\mathbf{T}$ ), si se usa el estimador de mínimos cuadrados y si se excluye el efecto del ruido, entonces los coeficientes estimados respecto a este sistema son:

$$\hat{\mathbf{a}}'_M = \mathbf{R}_{LS} \mathbf{A}' \mathbf{a}' = \left[ (\mathbf{A}'_M)^T \mathbf{A}'_M \right]^{-1} (\mathbf{A}'_M)^T \mathbf{A}' \mathbf{a}' \quad (4.5)$$

Si se dispone de información sobre las traslaciones, se puede transformar cada vector de coeficientes estimados al sistema de referencia ligado a la pupila ocular:

$$\hat{\mathbf{a}}_M = \mathbf{T}_M^{-1}(\mathbf{b})\hat{\mathbf{a}}_M \quad (4.6)$$

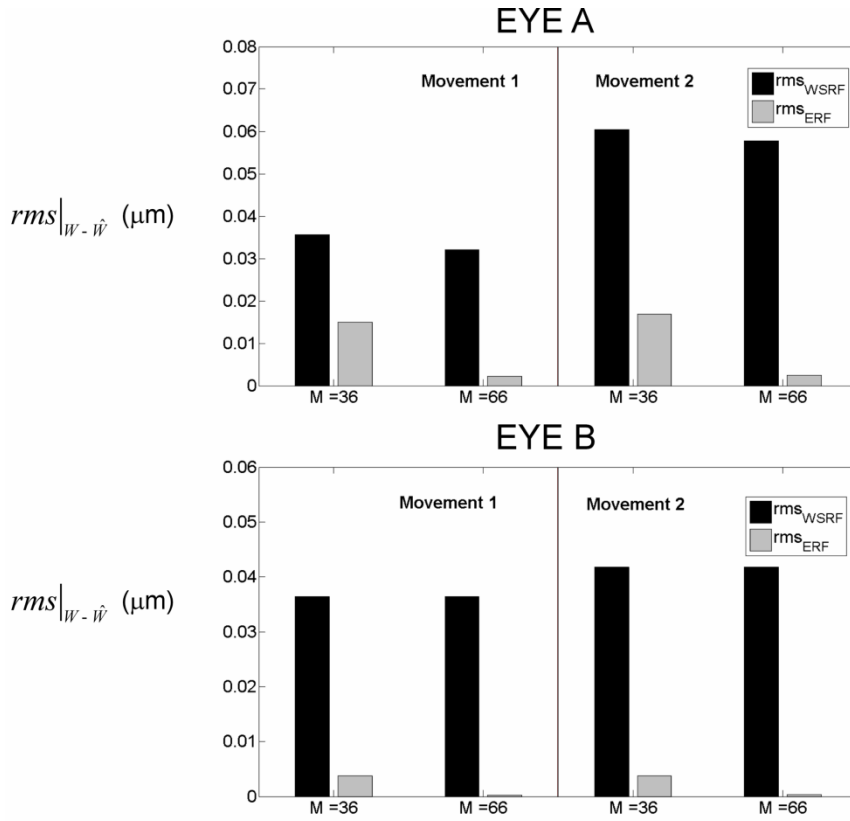
En esta expresión,  $\mathbf{T}_M$  es el primer bloque  $M \times M$  de la matriz  $\mathbf{T}$ . Si el frente incidente sólo tuviese  $M$  modos y existiese la solución (4.5), entonces  $\hat{\mathbf{a}}_M = \mathbf{a}$ . Como todo frente realista necesita infinitos modos, en la práctica existen ciertos errores derivados de la estimación de un número finito de modos y del acoplamiento modal. El objetivo del estudio es comparar la calidad de la estimación  $\hat{\mathbf{a}}_M$  de los coeficientes, en la que no se ha considerado el efecto de los movimientos [ya que (4.4) simplemente modela la traslación física de la pupila ocular], con la calidad de la estimación  $\hat{\mathbf{a}}_M$ .



**Figura 4.2:** a) Dos series de 50 traslaciones de la pupila ocular. Las variables de los ejes dan la posición  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y]^T$  del centro de la pupila ocular respecto de un sistema de referencia fijo en el sensor. b) Desviaciones típicas de los coeficientes estimados usando las expresiones (4.5) y (4.6). El primer caso se indica con las siglas WSRF de “sistema de referencia del sensor”; el segundo con ERF, de “sistema de referencia ocular”. Gráficas reproducidas de la publicación original (Arines et al. 2009).

La figura 4.2a) recoge dos trayectorias de 50 movimientos de la pupila ocular usadas en las simulaciones. Estas trayectorias se obtuvieron en el laboratorio durante dos series de medida de las aberraciones. La posición de la pupila ocular se estimó a partir de las imágenes del HS (Arines et al. 2010). Por lo que respecta a los parámetros de la simulación, se usó una matriz de microlentes cuadradas de lado  $d = L = 0.45$  mm, distribuidas en una red cuadrada. Los coeficientes  $\hat{\mathbf{a}}_M$  se estimaron respecto a una pupila de 5 mm concéntrica a una de las microlentes usando  $M = 35, 65$ . No se consideró el error de medida de los desplazamientos de los centroides.

En la figura 4.2b) se comparan las desviaciones típicas obtenidas tras aplicar (4.6) para transformar los coeficientes estimados,  $\sigma(\hat{a}_i) = [\langle \hat{a}_i^2 \rangle - \langle \hat{a}_i \rangle^2]^{1/2}$ , con las desviaciones típicas a las que se llega sin considerar el efecto de las traslaciones en la estimación,  $\sigma(\hat{a}_i^*) = [\langle (\hat{a}_i^*)^2 \rangle - \langle \hat{a}_i^* \rangle^2]^{1/2}$ . Se representan resultados correspondientes al ojo con aberraciones de alto orden de menor magnitud (“ojo B”; no confundir con los ojos reales del capítulo 5), a la trayectoria 1 y a la estimación con  $M=65$ . Mientras que  $\sigma(\hat{a}_i)$  toma valores similares para todos los modos estimados,  $\sigma(\hat{a}_i^*)$  aumenta de valor para los modos de bajo orden. Por tanto, la no consideración de los movimientos oculares aumenta significativamente la variabilidad de los coeficientes estimados en relación con la variabilidad ligada a la estimación. En el artículo también se observó la aparición de pequeños sesgos  $\langle \hat{\mathbf{a}}_M - \mathbf{a}_M \rangle$  adicionales al no considerar las traslaciones.



**Figura 4.3:** Raíz del error cuadrático medio de la estimación para diferentes ojos hipotéticos, trayectorias oculares y modos estimados, incluyendo o no la transformación (4.6) del vector de Zernikes para considerar las traslaciones en la estimación. La variable  $rms(W - \hat{W})_{ERF}$  es la  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2}$  del texto, mientras que  $rms(W - \hat{W})_{WSRF}$  es  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2}$ . Gráficas reproducidas de la publicación original (Arines et al. 2009).

La figura 4.3 compara la raíz del error cuadrático medio de la estimación  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2}$ , definido en (3.54), para diferentes situaciones. En particular, se comparan los errores cometidos al transformar los coeficientes de Zernike estimados con (4.6),  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2} =$

$[\sum_{i=1}^{M'} \langle (a_i - \hat{a}_i)^2 \rangle]^{1/2}$  (barras grises), con los cometidos sin considerar los desplazamientos en la estimación,  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2} = [\sum_{i=1}^{M'} \langle (a_i - \hat{a}_i)^2 \rangle]^{1/2}$  (barras negras). Para todos los ojos y trayectorias presentados, la consideración de los movimientos produce una reducción notable del error de estimación. Para el ojo A, esta reducción es más notable para la trayectoria 2, que incluye traslaciones de mayor magnitud y tiene un valor medio de los descentramientos más elevado. Para el ojo B, con aberraciones de alto orden de menor magnitud, las diferencias obtenidas entre las dos trayectorias son mucho más moderadas. Otra observación interesante es que  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2}$  disminuye para todos los ojos y trayectorias si en lugar de usar  $M=35$  se estiman  $M=65$  modos. Esta disminución del error de estimación con  $M$  mayor sugiere que el error de representación domina sobre el error de acoplamiento. No obstante, esta reducción desaparece al considerar  $\langle \varepsilon^2 \rangle^{1/2}$ .

Los resultados presentados muestran que los movimientos oculares aumentan la variabilidad y los sesgos obtenidos en las estimaciones de las aberraciones. Su medida y consideración es relevante en tareas tales como el estudio de la estadística o la dinámica de las aberraciones de ojos individuales.

## 4.4 Desarrollos y observaciones basados en algunos estudios previos

### 4.4.1 Estudio de Cagigal et al. (2002)

El trabajo de Cagigal et al. (2002) estudia una muestra de 84 ojos de personas jóvenes con visión normal y concluye que la función de aberración de esa población es un proceso homogéneo que sigue la estadística de Kolmogorov. En este apartado se comenta, en primer lugar, la metodología usada por los autores para estudiar la homogeneidad de las aberraciones. A continuación, se hace lo propio con los métodos usados para estudiar el espectro de potencias de la aberración estimada, a partir de los cuales Cagigal et al. concluyen que el proceso es de Kolmogorov. En particular, se estudia el efecto que tiene en el espectro de potencias: el cálculo del mismo en una pupila de dimensiones finitas, la estimación y la propagación del ruido del sensor. La conclusión a la que se llega en este apartado es que los resultados y el análisis realizados por Cagigal et al. no son apropiados ni para afirmar que la aberración es homogénea ni para sostener que sigue la estadística de Kolmogorov.

a) *Homogeneidad de las aberraciones*

Cagigal et al. estudian la homogeneidad basándose en la varianza espacial de las aberraciones estimadas para su muestra de ojos, con diferentes niveles de compensación ideal. La compensación ideal se obtiene igualando a cero los coeficientes de Zernike de bajo orden del frente estimado  $\hat{W}(\mathbf{r})$  hasta un cierto modo  $j = j_{\min}$  y se usa aquí como herramienta para estudiar por separado los modos de alto orden de la aberración. Sea  $\hat{W}_c(\mathbf{r})$  la aberración resultante de la compensación ideal hasta  $j = j_{\min}$ :

$$\hat{W}_c(\mathbf{r}) = \hat{W}(\mathbf{r}) - \sum_{j=0}^{j_{\min}-1} \hat{a}_j Z_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=j_{\min}}^M \hat{a}_j Z_j(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

Los autores tienen presente que una aberración homogénea deja de serlo en cuanto se corrigen los modos de bajo orden (Conan 2008). En la figura 3 del artículo de Cagigal et al. se recogen los valores experimentales obtenidos para la varianza espacial  $\sigma_{\hat{W}_c}^2(\mathbf{r})$  de la fase estimada frente a la coordenada radial normalizada (con  $R_p = 3.5$  mm) y dos niveles de compensación:  $j_{\min} = 3$  y 10. Como señalan los autores, la curva con  $j_{\min} = 3$  (línea a rayas), sin modos de prisma, muestra una clara variabilidad de la varianza con la posición en pupila, lo que prueba la no homogeneidad de  $\hat{W}_c(\mathbf{r})$  para esa corrección. No obstante, afirman que al aumentar el número de modos corregidos la curva de  $\sigma_{\hat{W}_c}^2(\mathbf{r})$  se va aproximando a una constante, tal y como sucede con la curva con  $j_{\min} = 10$  de su figura 3 (línea continua). Sostienen que esto mismo sucede para la estadística de Kolmogorov (Cagigal y Canales 2000), lo que demostraría una “recuperación de la homogeneidad” y que  $\hat{W}(\mathbf{r})$  es homogénea.

Consideremos que podemos despreciar cualquier efecto de la estimación y supongamos que la aberración estimada representa adecuadamente a la real y a su estadística. Aún así, la evaluación que hacen de  $\sigma_{\hat{W}_c}^2(\mathbf{r})$  otros autores con diferentes modelos de estadística produce escepticismo respecto al método propuesto (Conan 2008, Devaney et al. 2008). Por ejemplo, Conan evalúa esta función para las estadísticas de Kolmogorov y Von Kármán cuando la compensación se realiza con modos de Zernike. Observa que  $\sigma_{\hat{W}_c}^2(\mathbf{r})$  se mantiene aproximadamente constante en el interior de la pupila (aunque con ciertas fluctuaciones), pero al llegar a las cercanías del borde su valor crece. Este incremento es de un 35 % del valor de la varianza en el caso del modelo de Kolmogorov. Para el modelo de Von Kármán el crecimiento se modera, aunque aumenta conforme se compensan más modos. Es cierto que la región en la que se produce el incremento también se hace progresivamente más pequeña conforme  $j_{\min}$  aumenta, pero no desaparece. Devaney et al. evaluaron  $\sigma_{\hat{W}_c}^2(\mathbf{r})$  para el modelo de



Thibos, definido sobre un conjunto finito de 35 modos, y  $j_{\min} = 3, 15$ . Para el segundo caso, encontraron valores próximos a cero en el interior de pupila y fuertes crecimientos en los bordes. Como el modelo de Thibos no es homogéneo, esto lleva a pensar que el comportamiento descrito para la varianza residual se deba al uso de polinomios de Zernike. No sabemos qué sucede con los datos de Cagigal et al. cerca del borde de pupila, ya que las curvas de su figura 3 no incluyen esos valores.

*b) Espectro de potencias de la aberración estimada*

La figura 2 del artículo de Cagigal et al. grafica en escala log-log los espectros de potencias de las aberraciones estimadas por estos autores con los niveles de compensación  $j_{\min} = 3, 10$  (líneas continuas de menor y mayor grosor, respectivamente) frente a la frecuencia espacial radial  $\nu$ . Los autores afirman que existe una región para cada nivel de compensación en la que el modelo de Kolmogorov, proporcional a  $\nu^{-11/3}$ , representa adecuadamente el decaimiento experimental, a pesar de la existencia de ruido. Para mostrarlo, superponen a las curvas experimentales dos rectas ligadas al exponente  $\beta = 11/3$  (líneas de puntos). Afirman que estas regiones dependen de los polinomios de Zernike usados para representar a las aberraciones en cada caso. Además, identifican en la curva con menor compensación una frecuencia  $\nu_0$ , igual al inverso de una “escala externa ocular”. La escala externa es uno de los límites del rango inercial de Kolmogorov: en un sistema real se espera que el espectro de potencias no diverja cuando  $\nu \rightarrow 0$ , sino que por debajo de una frecuencia  $\nu = \nu_0$  se aproxime a un valor finito. Según los autores, esto se produce para  $\nu_0 = 0.2 \text{ mm}^{-1}$  en el caso  $j_{\min} = 3$ .

Para interpretar estos resultados y conclusiones vamos a derivar una serie de expresiones del espectro de potencias de la aberración. En primer lugar, estudiamos cómo cambia el espectro de potencias cuando la función de aberración está definida en una pupila de radio finito, que es la situación experimental. Dicho espectro es igual a:

$$P_w(\mathbf{v}) = (\pi R_p^2)^{-1} \left\langle \left| \text{FT} \left[ \text{circ}(\mathbf{r}/R_p) W(\mathbf{r}) \right] \right|^2 \right\rangle \quad (4.8)$$

Nótese que el espectro de potencias  $P_w(\mathbf{v})$  se define en (3.5) para una pupila con  $R \rightarrow \infty$ , condición necesaria para que el teorema de Wiener-Khinchin, dado por (3.6), sea válido para un proceso homogéneo. Para una pupila con dimensiones finitas  $P_w(\mathbf{v})$  estima, pero no reproduce, el valor de  $F_w(\mathbf{v})$ . La relación entre ambos espectros es bien conocida, sobre todo para el caso unidimensional (Barrett y Myers 2004: 392). Su derivación en dos dimensiones es análoga. A partir de (4.8):

$$P_W(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi R_p^2} \iint \text{circ}(\mathbf{r}_1/R_p) \text{circ}(\mathbf{r}_2/R_p) C_W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp[-i 2\pi \mathbf{v}^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^2 \mathbf{r}_1 d^2 \mathbf{r}_2 \quad (4.9)$$

Si  $W(\mathbf{r})$  es homogéneo, se puede usar la transformada inversa de (3.6) y llegar a que:

$$P_W(\mathbf{v}) = \pi R_p^2 \int F_W(\mathbf{v}') \text{besinc}^2[2R_p(\mathbf{v} - \mathbf{v}')] d^2 \mathbf{v}' \quad (4.10)$$

Aquí,  $\text{besinc}(2R_p \mathbf{v}) = J_1(2\pi R_p \nu) / \pi R_p \nu$ . Es decir, para un proceso homogéneo el espectro de potencias restringido a una pupila circular de radio finito es igual a la convolución del espectro de potencias en todo el plano con el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de la función  $\text{circ}(\mathbf{r}/R_p)$ . Nótese que el cuadrado de la función  $\text{besinc}$  aparece en el patrón de difracción de Airy. Si  $R_p \rightarrow \infty$ ,  $\pi R_p^2 \text{besinc}^2(2R_p \mathbf{v})$  origina una delta de Dirac, con lo que el espectro  $P_W(\mathbf{v})$  es igual a  $F_W(\mathbf{v})$ .

Para cualquier modelo isótropo, no sólo para el de Kolmogorov, la integral angular de (4.10) se puede calcular si se usa el valor de  $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|$  en polares y el teorema de adición de Gegenbauer para las funciones de Bessel (Abramowitz y Stegun 1970: 363). Entonces:

$$P_W(\nu) = \pi R_p^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} 2\pi(n+1)(n'+1) S_{n,n'} \left[ \int_0^{\infty} \nu' F_W(\nu') g_{n,n'}(R_p \nu') d\nu' \right] g_{n,n'}(R_p \nu) \quad (4.11)$$

Aquí,  $g_{n,n'}(R_p \nu) = (\pi R_p \nu)^{-2} J_{n+1}(2\pi R_p \nu) J_{n'+1}(2\pi R_p \nu)$ . Además,  $S_{n,n'} = \min(n, n') + 1$  si  $n$  y  $n'$  tienen la misma paridad y  $S_{n,n'} = 0$  en el resto de casos. La expresión indica que para un proceso isótropo su espectro de potencias  $P_W(\nu)$  calculado en una pupila de radio finito es igual a una suma de productos de pares de funciones de Bessel. Los coeficientes de la suma se obtienen filtrando  $F_W(\nu')$  por las mismas funciones radiales. Además,  $P_W(\nu)$  es rotacionalmente simétrico y los índices  $n, n'$  de (4.11) son los órdenes radiales del desarrollo de Zernike de  $W(\mathbf{r})$ , como se ve más adelante.

Derivemos ahora el espectro de potencias  $P_W(\mathbf{v})$  en una pupila circular de radio finito usando el desarrollo en Zernikes de la aberración. Sustituyendo (3.14) en (4.8):

$$P_W(\mathbf{v}) = \pi R_p^2 \sum_{i=0}^{M'} \sum_{i'=0}^{M'} Q_i(R_p \mathbf{v}) \langle a_i a_{i'} \rangle Q_{i'}^*(R_p \mathbf{v}) \quad (4.12)$$

Tanto (4.8) como (4.12) se pueden calcular para procesos no homogéneos. Tras sustituir la expresión (3.24) de los espectros de Zernike se obtiene que:

$$P_W(\mathbf{v}) = \pi R_p^2 \sum_{i=0}^{M'} \sum_{i'=0}^{M'} N_n^m N_{n'}^{m'} (-i)^m i^{m'} (-1)^{(n+n'-m-m')/2} \langle a_i a_{i'} \rangle g_{n,n'}(\nu) \Phi_m(\phi) \Phi_{m'}(\phi) \quad (4.13)$$

Aquí,  $\Phi_m(\phi)$  es la parte angular de  $Q_n^m(f, \phi)$ . El promedio angular de (4.13) es:

$$\bar{P}_W(\nu) = \pi R_p^2 \sum_{i=0}^{M'} \sum_{i'=0}^{M'} \delta_{m,m'} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)(n'+1)} \langle a_n^m a_{n'}^{m'} \rangle g_{n,n'}(\nu) \quad (4.14)$$

Esto es, el promedio angular del espectro de potencias de cualquier modelo de la aberración definido en una pupila de radio finito también es igual a la suma de productos de funciones de Bessel  $g_{n,n'}(R_p \nu)$ .

Para procesos homogéneos, Wiener-Khinchin permite relacionar las correlaciones de los Zernikes con  $F_W(\mathbf{v})$  por medio de (3.22). Entonces (4.12) se convierte en:

$$P_W(\mathbf{v}) = \pi R_p^2 \sum_{i=0}^{M'} \sum_{i'=0}^{M'} \left[ \int Q_i^*(R_p \mathbf{v}') F_W(\mathbf{v}') Q_{i'}(R_p \mathbf{v}') d^2 \mathbf{v}' \right] Q_i(R_p \mathbf{v}) Q_{i'}^*(R_p \mathbf{v}) \quad (4.15)$$

A partir de esta expresión se recupera (4.10) si se usa la completitud de los Zernikes:

$$\sum_{i=0}^{\infty} Z_i(\mathbf{r}/R_p) Z_i(\mathbf{r}'/R_p) = R_p^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.16)$$

Para el caso de un proceso isótropo, si se usa la dependencia  $F_W(\nu)$  de su espectro de potencias y la expresión (3.24) de los espectros de Zernike, se llega a que:

$$P_W(\mathbf{v}) = \pi R_p^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} 2\pi (n+1)(n'+1) \left[ \int_0^{\infty} \nu' F_W(\nu') g_{n,n'}(\nu') d\nu' \right] g_{n,n'}(\nu) \quad (4.17)$$

$$\sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} (2 - \delta_{m,0}) \delta_{m,m'} \Phi_m^2(\phi)$$

En esta ecuación se consideran pasos de dos unidades en los sumatorios de  $m$  y  $m'$ . Se puede probar que este  $P_W(\mathbf{v})$  es rotacionalmente simétrico si por cada modo de índices  $(n, m)$  incluido en el sumatorio también está presente el modo  $(n, -m)$ . Al evaluar los sumatorios de  $m$  y  $m'$  para órdenes radiales completos, se llega de nuevo a (4.11).

La derivación hecha con la representación de Zernike hace muy sencillo derivar el espectro de potencias  $P_{W_c}(\mathbf{v})$  en una pupila de radio finito de un frente  $W_c(\mathbf{r})$  con compensación ideal. Usando (4.7), se concluye que basta con evaluar los sumatorios respecto a  $n$  y  $n'$  de (4.11) entre  $n_{\min}$  y, de ser el caso,  $n_{\max}$ ; o los sumatorios respecto a  $i$  e  $i'$  de (4.13) y (4.14) entre  $i_{\min}$  e  $i_{\max}$ . Nótese que  $P_{W_c}(0) = 0$  si se excluye el pistón, i. e., si  $n_{\min} \geq 1$ . Para Kolmogorov, si  $n_{\min} \geq 1$ :

$$P_{W_c}(\nu) = 0.023\pi \pi^{8/3} \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \sum_{n'=n_{\min}}^{n_{\max}} (n+1)(n'+1) S_{n,n'} \frac{J_{n+1}(2\pi R_p \nu)}{\pi R_p \nu} \frac{J_{n'+1}(2\pi R_p \nu)}{\pi R_p \nu} \quad (4.18)$$

$$\frac{\Gamma(14/3) \Gamma[(n+n'-5/3)/2]}{\Gamma[(-n+n'+17/3)/2] \Gamma[(n-n'+17/3)/2] \Gamma[(n+n'+23/3)/2]}$$

Aquí (4.18) se encuentra en unidades de  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ .

Ocupémonos, por último, del efecto del sensor y la estimación. A partir de (4.12) y de (3.86), el espectro de la aberración estimada es:

$$\begin{aligned} P_{\hat{W}}(\mathbf{v}) &= (\pi R_p^2) \mathbf{Q}_M^T(R_p \mathbf{v}) \mathbf{C}_{\hat{a}} \mathbf{Q}_M^*(R_p \mathbf{v}) \\ &= (\pi R_p^2) \mathbf{Q}_M^T(R_p \mathbf{v}) \mathbf{R} [\mathbf{C}_{\mu} + \mathbf{C}_{\eta}] \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_M^*(R_p \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Esta expresión es válida para procesos no homogéneos. El espectro de la aberración estimada no es rotacionalmente simétrico por necesidad, incluso aunque la aberración real sea isotrópica. Por ello, evaluamos su promedio angular  $\bar{P}_{\hat{W}}$  usando la expresión (4.14) con la aberración estimada:

$$\bar{P}_{\hat{W}}(\nu) = \pi R_p^2 \sum_{j=j_{\min}}^M \sum_{j'=j_{\min}}^M \delta_{m,m'} (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)(n'+1)} \langle \hat{a}_n^m \hat{a}_{n'}^{m'} \rangle g_{n,n'}(\nu) \quad (4.20)$$

Atendiendo a la segunda igualdad de (4.19), la expresión (4.20) también se puede usar para estudiar el efecto del ruido en el espectro de potencias de la aberración estimada.

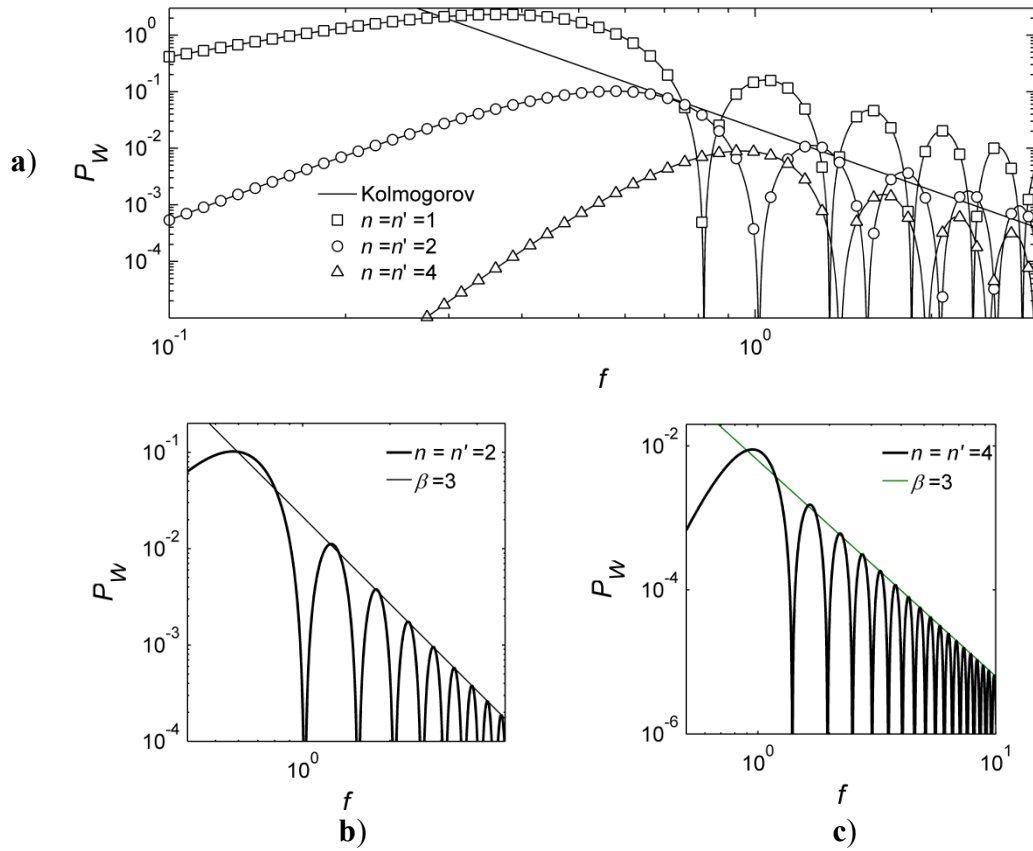
Comentemos también que si se usa el teorema de Parseval se obtiene la siguiente relación entre el espectro de potencias en una pupila finita y  $\langle \|\mathcal{W}(\mathbf{r})\|^2 \rangle$ :

$$\int P_{\hat{W}}(\mathbf{v}) d^2 \mathbf{v} = R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \langle \mathcal{W}^2(\mathbf{r}) \rangle d^2 \mathbf{r} = \langle \|\mathcal{W}(\mathbf{r})\|^2 \rangle \quad (4.21)$$

La figura 4.4a) muestra el comportamiento para bajas frecuencias de varios sumandos del promedio angular  $\bar{P}_{\hat{W}}$  del espectro de potencias restringido a una pupila de radio finito de cualquier modelo de la aberración, de acuerdo con (4.14). Se grafican las contribuciones de diferentes órdenes radiales por separado: los casos  $n = n' = 1, 2$  y 4 (no se incluyen los términos originados por correlaciones cruzadas entre modos de diferente orden). Los sumandos decaen a cero para  $f = 0$ , más rápidamente cuanto mayor es el orden radial. Respecto al primer máximo, este tiene lugar a frecuencias  $f$  mayores conforme aumenta  $n$ . Los mínimos de las curvas suceden en los ceros de las funciones de Bessel correspondientes. En la gráfica, los pesos de los diferentes sumandos son los asociados al modelo de Kolmogorov según (4.18). La varianza de los prismas es muy importante en este modelo: es responsable del 86 % del valor de  $\Delta_0$  (Roggemann y Welsh 1996: 98). Por ello el sumando  $n = n' = 1$  tiene una amplitud más elevada que los sumandos de órdenes superiores.

En la figura 4.4b) se grafica otra vez la contribución de los modos de segundo orden,  $n = n' = 2$ , al espectro. Se representa también la envolvente resultante del uso de la aproximación de las funciones de Bessel para frecuencias elevadas, que ofrece

información acerca de cómo decae cada sumando de (4.11) o de (4.14) para valores altos de  $f$ . De acuerdo con esa aproximación,  $J_n(x) \cong [2/(\pi x)]^{1/2} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4)$  (Abramowitz y Stegun 1970: 364). Por tanto, para frecuencias elevadas cada par  $g_{n,n'}(f) = (\pi f)^{-2} J_{n+1}(2\pi f) J_{n'+1}(2\pi f)$  oscila según un producto de cosenos cuya envolvente decae con  $f^{-3}$ . La recta que se origina en escala log-log no representa adecuadamente a la envolvente de la función para bajas frecuencias. Si se usan los máximos de bajas frecuencias para hallar el exponente con el que decae el espectro, se obtienen valores ligeramente superiores ( $\beta \sim 3.2$ ). La figura 4.4c) compara el sumando  $n = n' = 4$  con la envolvente de su aproximación para frecuencia elevada.



**Figura 4.4:** Comportamiento de los sumandos  $g_{n,n'}(f)$  del promedio angular del espectro de potencias restringido a una pupila circular finita de cualquier modelo de la aberración: a) gráfica conjunta de diferentes sumandos  $(n, n')$ ; comparación de los sumandos b)  $n = n' = 2$  y c)  $n = n' = 4$  con la envolvente de exponente  $\beta = 3$  para  $f$  elevadas. La abscisa es la frecuencia normalizada  $f$ ; las unidades de las ordenadas son  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ . El peso de cada sumando es el asociado a Kolmogorov.

Comentemos el comportamiento oscilatorio de los sumandos de (4.14) usando las aproximaciones de las funciones de Bessel para  $f$  elevada. La delta de Kronecker  $\delta_{m,m'}$  de la ecuación impone que los índices  $n$  y  $n'$  de cada sumando tengan la misma paridad. Para  $n = n'$  y  $m = m'$  (sumandos asociados a varianzas de coeficientes), la oscilación se

produce según un  $\cos^2(2\pi f - n\pi/2 - \pi/4)$ . Por tanto, las colas de todos los sumandos cuyos índices  $n = n'$  tengan una paridad dada oscilan en fase entre ellos para frecuencias elevadas. El desfase entre los dos grupos con  $n = n'$  y cada paridad es de  $\pi/2$ : los máximos de las colas de un grupo tienen lugar en los mínimos del otro.

El exponente  $\beta = 3$ , con el que decaen los sumandos del espectro restringido a una pupila circular finita de cualquier aberración isótropa [cf. (4.11)] o los sumandos del promedio angular del espectro de cualquier modelo de la aberración [cf. (4.14)], es cercano al exponente 11/3 del espectro  $F_w$  de Kolmogorov. Esta cercanía compromete la capacidad del método de Cagigal et al. para discernir entre diferentes estadísticas candidatas. Veamos algunas estadísticas muy diferentes a la de Kolmogorov para las que es de esperar que sus espectros decaigan con  $\beta = 3$ . Nótese que cada sumando  $n = n'$  o  $i = i'$  de las expresiones (4.11) y (4.14) está pesado por las varianzas de los modos. En primer lugar, supongamos que nos encontramos ante un modelo de estadística en el que las aberraciones de un determinado orden radial  $n_{\text{main}}$  son muy dominantes. Entonces,  $g_{n_{\text{main}}, n_{\text{main}}}(f)$  es la función que aparece en los sumandos de dicho orden y  $f_{\text{main}}$  es la frecuencia en la que ocurre su máximo principal. Si el peso de las varianzas del orden  $n_{\text{main}}$  es lo suficientemente elevado en comparación con los órdenes restantes, los máximos de la cola de la función  $g_{n_{\text{main}}, n_{\text{main}}}(f)$  determinan el ritmo de decaimiento de la envolvente del espectro de potencias para frecuencias superiores a  $f_{\text{main}}$ . En esas circunstancias el espectro decae con exponente 3 para  $f > f_{\text{main}}$ . Como se comentó en la sección 4.1, las estimaciones realizadas en sensores experimentales sugieren que las varianzas de los coeficientes de Zernike de una población de ojos con visión normal decaen con  $n$  de manera más rápida que el modelo de Kolmogorov. Por tanto, es posible que para una corrección dada esta estadística esté dominada por el orden  $n_{\text{min}}$  (por tanto,  $n_{\text{main}} = n_{\text{min}}$ ). Un ejemplo intuitivo es  $n_{\text{min}} = 2$  cuando no se corrigen las ametropías de una muestra de ojos. También es posible que, en lugar de un único orden dominante, para explicar el comportamiento del espectro haya que considerar un conjunto de varios órdenes, en todo caso menores que el  $n_{\text{max}}$  considerado en la estimación. Incluso en este caso se espera que el exponente de la envolvente del espectro a altas frecuencias sea próximo a 3. Además, si los modos de bajo orden son dominantes, el espectro no se ha de ver afectado de forma significativa por el truncamiento de los Zernikes en  $n_{\text{max}}$ .

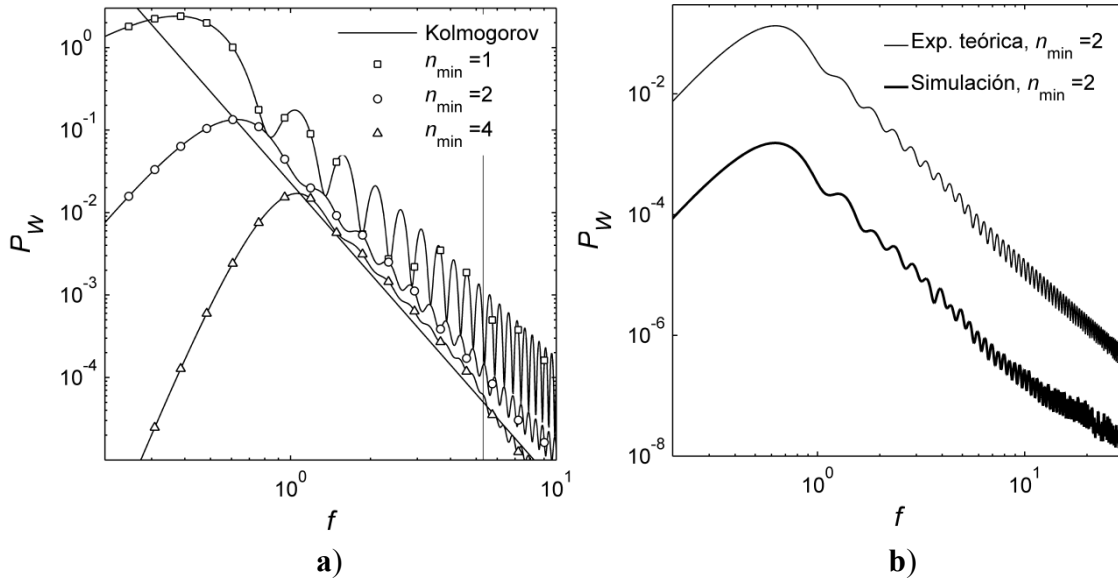
Si nos encontramos con modelos cuyas varianzas decaen lentamente con el orden radial, entonces el truncamiento en un orden  $n_{\text{max}}$  del desarrollo de la aberración, que

sucede siempre que se emplea una estimación modal, dificulta el uso del espectro de potencias. Sea  $f_{\max}$  la frecuencia en la que ocurre el máximo principal de la función  $g_{n_{\max}, n_{\max}}(f)$ . Para frecuencias  $f > f_{\max}$ , el espectro de potencias de la aberración truncada deja de representar adecuadamente al espectro de la aberración con un número infinito de modos; en su lugar, es igual a la suma de las colas de las funciones  $f^{-2} J_{n+1}(2\pi f) J_{n'+1}(2\pi f)$  para los órdenes  $n, n' \leq n_{\max}$ . Como hemos visto, cada una de estas colas decae con un exponente  $\beta = 3$  para frecuencias elevadas. Un valor bajo de  $f_{\max}$  en relación con la corrección  $n_{\min}$  usada hace que sólo un rango muy limitado de la curva del espectro  $P_{\hat{W}}$  de la aberración estimada ofrezca información acerca del comportamiento del espectro  $F_W$  en el plano.

Una conclusión derivada de la figura 4.4a) es que Cagigal et al. interpretaron incorrectamente el comportamiento de su curva experimental a bajas frecuencias como una “escala externa ocular”. Si se considera la expresión (4.11) y se supone que el peso de los diferentes modos de la aberración decrece con el orden radial  $n$ , entonces los espectros de potencias calculados en una pupila de radio finito de una aberración isótropa corregida hasta un orden  $n_{\min}$  están dominados a bajas frecuencias por la función  $f^{-2} J_{n_{\min}+1}^2(2\pi f)$ , el módulo al cuadrado del espectro radial del menor orden de Zernike considerado. Además, (4.14) informa de que sucede lo mismo para el promedio angular del espectro de prácticamente cualquier aberración definida en una pupila circular. Es el máximo de esa función en escala logarítmica lo que los autores identificaron erróneamente como la frecuencia  $\nu_0$  correspondiente a la escala externa. Los datos de Cagigal et al. para  $n_{\min} = 2$  ( $\nu_0 = 0.2 \text{ mm}^{-1}$  y  $R_p = 3.5 \text{ mm}$ ) se corresponden con una  $f = 0.7$ , aproximadamente la posición del máximo de la curva con  $n = n' = 2$  de la figura 4.4a). Para  $n_{\min} = 4$ , los autores no representaron la curva por debajo de  $\nu = 0.3 \text{ mm}^{-1}$  porque estaba “mal definida”. Este valor se corresponde con  $f = 1.05$ , aproximadamente el máximo de la curva con  $n = n' = 4$  de la figura 4.4a).

En la figura 4.5a) se grafican los espectros de potencias  $P_{W_c}(f)$  restringidos a una pupila de radio finito del modelo de Kolmogorov para las correcciones  $n_{\min} = 1, 2$  y  $4$ . Los dos últimos son los casos considerados en la figura 2 de Cagigal et al. Respecto al comportamiento a frecuencias intermedias de las curvas de la figura, recalcar que no sólo hay un decaimiento de los espectros, sino que estos también fluctúan como consecuencia del tamaño finito de la pupila considerada. De acuerdo con (4.11) y (4.14), este comportamiento no es exclusivo del modelo de Kolmogorov y se produce en ausencia de ruido. En la gráfica también se observa que los espectros oscilan más

rápidamente conforme aumenta  $f$ , comportamiento que también se debe a la utilización de un dominio espacial finito (es propio de las funciones de Bessel en escala logarítmica). Un último comentario en relación con las altas frecuencias. Para evaluar (4.18) se usó un valor de  $n_{\max} = 30$  para truncar el desarrollo de la aberración en polinomios de Zernike. Considerando que las varianzas de los diferentes coeficientes de Zernike de Kolmogorov decrecen con  $n$  y a la vista de la figura 4.4a), podemos considerar que nuestro espectro representa de manera adecuada al espectro con un número infinito de modos para frecuencias menores o iguales que la frecuencia  $f_{\max}$  en la que ocurre el máximo de  $f^{-2} J_{n_{\max}+1}^2(2\pi f)$ . Este valor se representa en la figura 4.5a) con una recta vertical. Para frecuencias superiores, se produce un aumento del ritmo de decrecimiento de las curvas con  $n_{\min} = 2$  y 4 (el aumento del caso  $n_{\min} = 2$  no es fácil de apreciar en la gráfica; el caso  $n_{\min} = 1$  se discute más adelante). No obstante, para frecuencias todavía mayores (no representadas en la gráfica), dicho ritmo vuelve a decrecer y la asíntota vinculada a los máximos locales decae con un exponente 3.



**Figura 4.5:** Evaluación del espectro de potencias limitado a una pupila de radio finito del modelo de Kolmogorov usando la ecuación (4.18): a) espectro de potencias con las correcciones  $n_{\min} = 1, 2$  y 4; b) comparación de la expresión analítica para  $n_{\min} = 2$  con una simulación numérica usando  $K = 85$  realizaciones del vector de coeficientes de la aberración. Se usó  $n_{\max} = 30$  en todas las curvas. La abscisa es la frecuencia normalizada  $f$  y las ordenadas están en unidades de  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ .

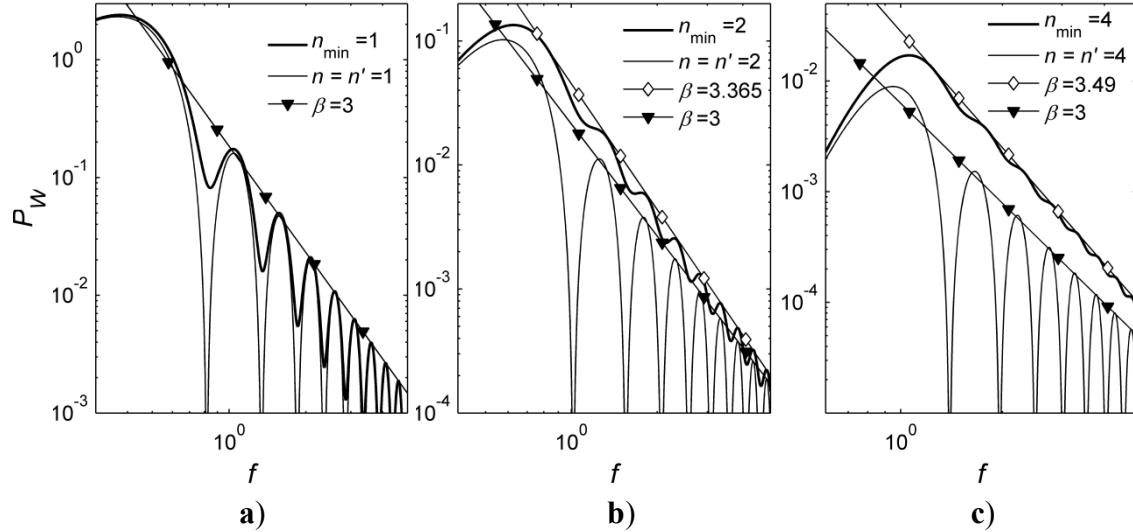
En la figura 4.5b) se usa una simulación numérica para verificar la derivación de la expresión (4.18) del espectro de potencias de Kolmogorov restringido a una pupila finita. Se usan  $n_{\min} = 2$ ,  $n_{\max} = 30$ . La simulación se realiza hallando  $K = 85$  realizaciones del vector de coeficientes  $\mathbf{a}$  con el método basado en la descomposición de



Cholesky. A continuación, se evalúa numéricamente  $W(\mathbf{r})$  en un conjunto discreto de puntos de la pupila circular distribuidos en una red cuadrada con espaciado  $R_p/64$ . El espectro de potencias (4.8) se calcula usando transformadas rápidas de Fourier de 2048 puntos. La curva de la simulación está atenuada un factor 100 para facilitar la comparación. La gráfica muestra un buen acuerdo entre las curvas, incluso aunque la simulación se corresponde con una muestra finita de  $K$  realizaciones y la expresión teórica se ha calculado usando las covarianzas de la población. Por tanto, para este orden de valores de  $K$  no se espera que el tamaño de la muestra altere significativamente los resultados obtenidos en presencia de la estadística de Kolmogorov. La mayor disparidad entre las curvas tiene lugar a altas frecuencias, pero se debe al *aliasing* introducido en el espectro de la simulación por el muestreo finito de la aberración.

En la figura 4.6 se grafican de nuevo, por separado, los espectros de potencia calculados en una pupila de radio finito para una aberración con estadística de Kolmogorov y correcciones  $n_{\min}=1, 2$  y 4. Solo se considera el rango de frecuencias en el que se puede despreciar el truncamiento de la serie usado en el cálculo. Las oscilaciones que se producen en el espectro restringido a una pupila finita de un modelo cualquiera de la aberración nos llevan a usar la envolvente superior para determinar su exponente de decaimiento, que es diferente del exponente del espectro en todo el plano. En esta figura se encuentra que si se considera el efecto del tamaño finito de la pupila, los exponentes de los espectros de Kolmogorov están todavía más cercanos al  $\beta=3$  de la contribución de un orden radial individual. Esto complica la identificación del modelo responsable del comportamiento experimental. El efecto del truncamiento de la serie de polinomios se trata más adelante. En la figura 4.6a) se presenta el caso  $n_{\min}=1$ . Aunque no es una de las situaciones estudiadas por Cagigal et al., esta corrección presenta particularidades interesantes. En la gráfica se compara el perfil de dicho espectro con el sumando de (4.18) debido a los prismas ( $n=n'=1$ ). Se comprueba que los máximos de este espectro en un dominio finito se deben prácticamente a los modos de prismas, mientras que otros modos de bajo orden contribuyen a hacer que los mínimos sean distintos de cero. Como consecuencia, la envolvente de los máximos locales de este espectro está bien representada por el exponente  $\beta=3$  de la envolvente asociada a la aproximación de las funciones de Bessel con  $n=n'=1$  [el factor multiplicativo de la envolvente se toma de (4.18), por lo que no es necesario realizar ningún ajuste; si se consideran las bajas frecuencias, se puede usar un exponente ligeramente superior, como se comentó en la figura 4.4b]. Esta es también la causa de que la envolvente de

los máximos de la curva con  $n_{\min}=1$  de la figura 4.5a) no se modifique a altas frecuencias como consecuencia del truncamiento de la serie de polinomios. El comportamiento descrito no se produce con otros valores de  $n_{\min}$  y se debe al elevado valor de la varianza de los prismas para Kolmogorov.



**Figura 4.6:** Comparación del espectro de potencias calculado en una pupila finita para la estadística de Kolmogorov y las correcciones a)  $n_{\min}=1$ , b)  $n_{\min}=2$  y c)  $n_{\min}=4$  con la contribución debida exclusivamente al orden  $n_{\min}$  correspondiente y con leyes de potencias  $f^{-\beta}$ . Se usó  $n_{\max}=30$ . Las ordenadas están en unidades de  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ .

En la figura 4.6b) se presenta el espectro de potencias en una pupila de radio finito del modelo de Kolmogorov con el pistón y los prismas corregidos. En esta ocasión es apreciable la contribución de modos de más alto orden que  $n_{\min}$  al valor de los máximos. El exponente de la envolvente del espectro corregido,  $\beta=3.365$ , está más cercano al exponente  $11/3$  del espectro en el plano del modelo de Kolmogorov que para el caso  $n_{\min}=1$ . No obstante, se encuentra a medio camino entre el valor 3.667 asociado a Kolmogorov y el exponente  $3-3.2$  asociado a la contribución de un orden radial individual de un espectro calculado en una pupila finita. Nótese que un modelo, distinto del de Kolmogorov, que estuviese dominado por aberraciones de segundo orden (predominantes en las poblaciones de ojos humanos con las ametropías sin corregir) tendría un comportamiento similar al dado por el sumando  $n=n'=2$  de (4.18), que también se muestra en la gráfica. La presencia de aberraciones de alto orden en el sensor haría que los mínimos de la curva fueran distintos de cero, pero a la vez estas aberraciones serían de magnitud lo suficientemente baja como para no afectar a los máximos de manera significativa (tal y como sucede con los modos mayores que los prismas en la gráfica 4.6a). El espectro de potencias en una pupila de radio finito para

un modelo de este tipo tendría un exponente muy similar al espectro de Kolmogorov en dicha pupila con el pistón y los prismas corregidos, a pesar de ser la estadística de ambos modelos muy diferente. Además, hay que tener presente que la exactitud en la determinación del exponente se ve comprometida si no se tiene presente la naturaleza ondulatoria a frecuencias intermedias de los espectros calculados en dominios espaciales finitos y si se tratan dichas oscilaciones como ruido. La figura 4.6c) grafica el espectro de potencias para una pupila de radio finito del modelo de Kolmogorov con la corrección  $n_{\min}=4$ . En esta situación, el exponente asociado al espectro es  $\beta=3.49$ , valor más cercano al exponente del espectro Kolmogorov en todo el plano que en las correcciones anteriores.

La figura 4.6 se centra en los efectos del uso de una pupila de radio finito en el cálculo del espectro de potencias de la aberración estimada. Estudiemos ahora las consecuencias de otra característica de la estimación: el truncamiento del desarrollo de la aberración en polinomios de Zernike. Al comentar la figura 4.5a) ya se mencionó el efecto que tenía el truncamiento en el espectro y las frecuencias espaciales en las que era relevante. En dicha figura se empleó un número de modos muy superior al que permiten los sensores disponibles:  $M=495$  ( $n=30$ ). Cagigal et al. usaron  $M=44$  modos, lo que se corresponde con  $n_{\max}=8$ . Por tanto, la frecuencia del máximo principal de la función  $f^{-2}J_{n_{\max}+1}^2(2\pi f)$  es  $f_{\max} \cong 1.66$ ,  $\nu_{\max} = 0.47 \text{ mm}^{-1}$  en la figura 2 de Cagigal et al. Los autores mencionados incluyen en esa gráfica frecuencias mucho más elevadas que este valor, para las cuales el espectro original no está adecuadamente representado por la serie truncada. Por tanto, la caída observada en buena parte de la gráfica debe ser atribuida a las colas de las funciones  $g_{n,n'}(f)$  con  $n, n' \leq n_{\max}$ . Como indica (4.14), este comportamiento se produce para prácticamente cualquier modelo y las envolventes de cada una de estas funciones tienen un exponente 3 cercano al valor  $11/3$  de Kolmogorov. Resulta ilustrativo graficar los efectos que introduce el truncamiento de la serie de Zernikes a  $M=44$  en los espectros de potencias restringidos a pupilas finitas  $P_W$  de la estadística de Kolmogorov, teniendo presente que otros modelos con aberraciones de alto orden relevantes van a experimentar alteraciones similares en el ritmo de decaimiento de sus espectros.

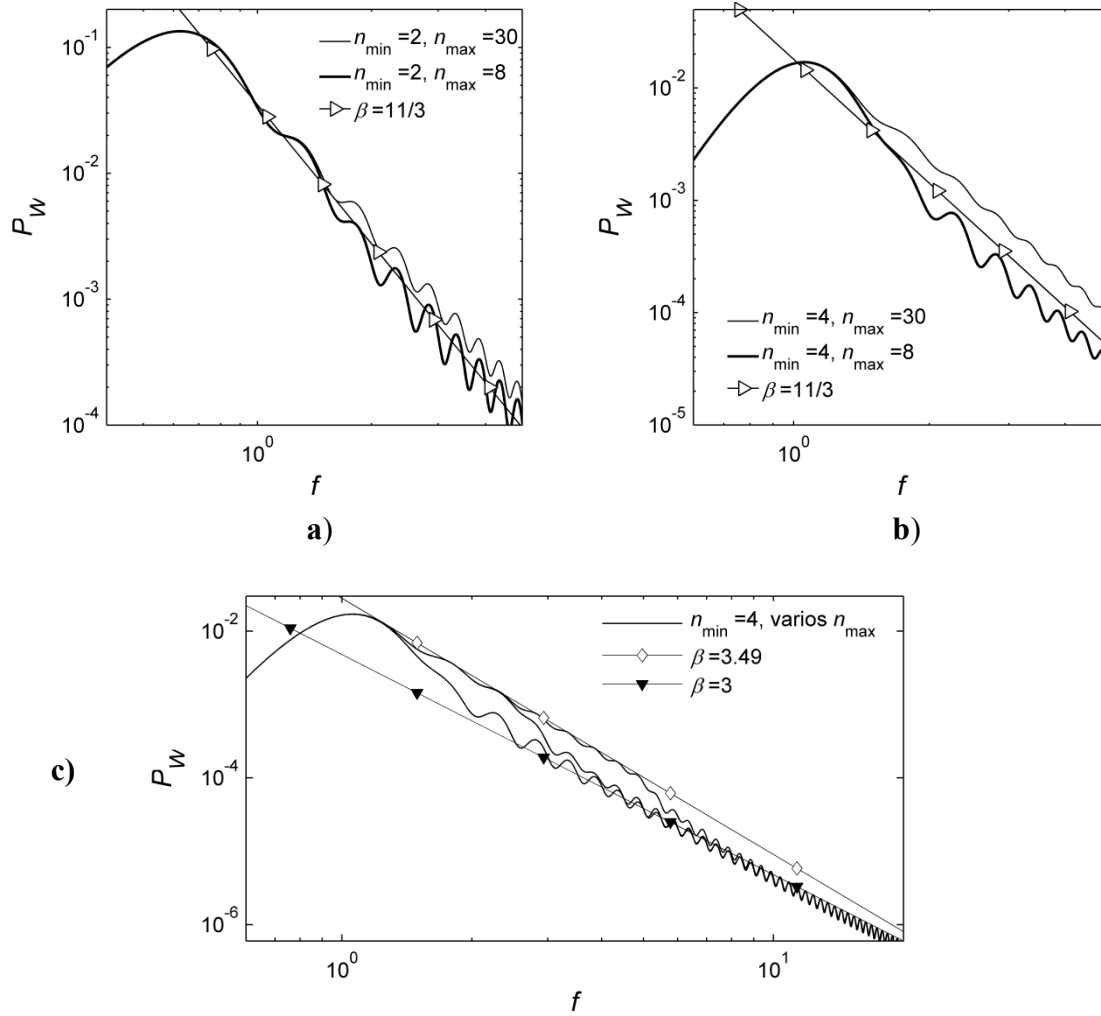
En la figura 4.7a) se representa el truncamiento  $n_{\max}=8$  con la corrección  $n_{\min}=2$ . El espectro se compara con otro calculado con  $n_{\max}=30$ , que se puede considerar que tiene infinitos modos en el rango de frecuencias de la gráfica. En torno a la frecuencia  $f_{\max} \cong 1.66$  se produce un incremento en el ritmo de decrecimiento del

espectro con  $n_{\max} = 8$  respecto al caso con infinitos modos. No obstante, para frecuencias más elevadas dicho ritmo vuelve a disminuir, de modo que la envolvente de los máximos de alta frecuencia decae más lentamente que la envolvente de la curva sin error de representación: mientras que para esta última  $\beta = 3.365$ , el espectro del frente truncado decae a altas frecuencias con  $\beta = 3$ . La existencia de regiones con diferentes comportamientos hace difícil definir una envolvente para la curva con  $n_{\max}$  finito. El exponente obtenido además depende de factores como el propio valor de  $n_{\max}$  o la frecuencia más alta que se incluya en la gráfica. Por supuesto, se puede intentar recurrir al procedimiento seguido por Cagigal et al.: superponer al espectro del frente truncado una curva que siga la ley de potencias de Kolmogorov, con exponente  $\beta = 11/3$ , tal y como se ilustra en la figura. El problema de este método es que si se ignoran los efectos del uso de un dominio espacial finito en el cálculo del espectro y del truncamiento de la serie de Zernikes (oscilaciones en el espectro, existencia de regiones con distintos ritmos de decaimiento, exponente próximo a  $\beta = 3$  para frecuencias superiores a  $f_{\max}$ ), es muy posible que este tipo de comparación con la potencia de Kolmogorov sea en apariencia satisfactoria en presencia de otras estadísticas muy diferentes.

En la curva experimental de Cagigal et al. para  $n_{\min} = 2$  de la figura 2 de su artículo no se aprecian cambios significativos en el espectro de potencias en torno a  $\nu_{\max} = 0.47 \text{ mm}^{-1}$ . Este hecho puede explicarse teniendo presente que los modos de segundo orden de la población de ojos tienen un mayor peso relativo que el proporcionado por Kolmogorov, lo que hace que esa curva sea menos sensible a la no inclusión de los modos de alto orden. También llama la atención que en esa curva de Cagigal et al. todos los mínimos que suceden a frecuencias menores que  $1 \text{ mm}^{-1}$  son del mismo orden de magnitud, comportamiento que, como se ve en la gráfica 4.7a), no es atribuible a Kolmogorov.

La figura 4.7b) presenta el caso  $n_{\min} = 4$ . En ella el decrecimiento que se produce en torno a  $f_{\max}$  es más acusado. Para frecuencias más elevadas que las mostradas en la gráfica, la curva con truncamiento modera de nuevo su ritmo de decrecimiento hasta un exponente 3 [cf. la figura 4.7c)]. La curva de Cagigal et al. para  $n_{\min} = 4$  muestra algunas similitudes con la de la figura 4.7b). En particular, a pesar de las pocas muestras que contiene la figura de su artículo, se puede ver un comportamiento diferente a ambos lados de  $\nu_{\max}$ . Destaca el hecho de que, para frecuencias superiores a ese valor, la curva experimental parece decaer de manera más lenta que el exponente de Kolmogorov. No obstante, no podemos descartar que este fenómeno se deba al dominio del orden

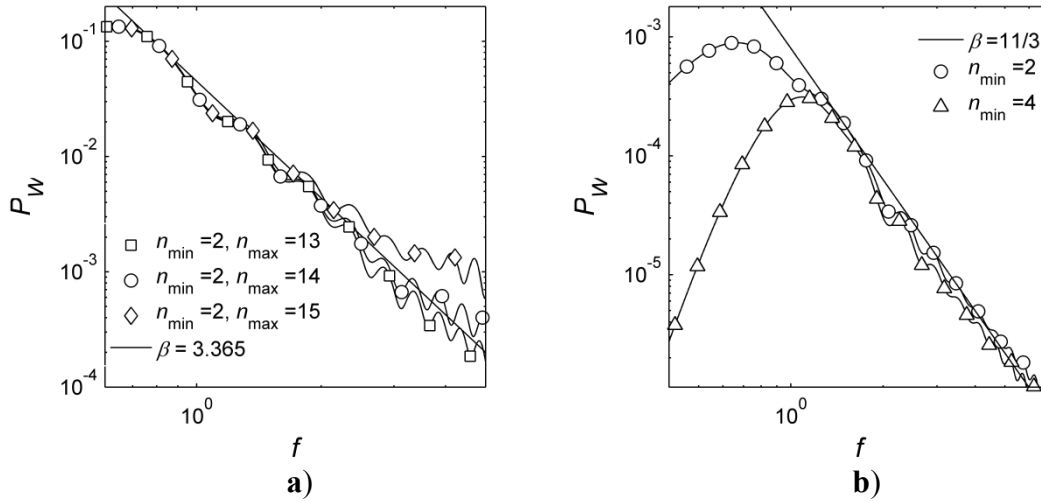
$n_{\min} = 4$  para esta corrección. Como se ha comentado en la figura 4.4, en esa situación el exponente  $\beta$  de la envolvente de los máximos sería superior a 3 para frecuencias bajas y disminuiría a 3 para frecuencias intermedias y altas.



**Figura 4.7:** Efecto del truncamiento de la serie de polinomios de Zernike en el espectro de potencias calculado en una pupila de radio finito para el modelo de Kolmogorov. En a) se estudia el caso con  $n_{\max}=8$  y corrección  $n_{\min}=2$ ; en b) el caso  $n_{\max}=8$  con corrección  $n_{\min}=4$ . La figura c) ilustra el comportamiento a altas frecuencias de las curvas con  $n_{\min}=4$  y  $n_{\max}=8, 15$  y  $30$ . La abscisa es la frecuencia normalizada  $f$  y las ordenadas están en unidades de  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$ .

En la figura 4.7c) se estudian los comportamientos a altas frecuencias de los casos con corrección  $n_{\min}=4$  y truncamientos  $n_{\max}=8, 15, 30$ . Como se ha comentado, para frecuencias superiores a la  $f_{\max}$  de cada truncamiento los espectros dejan de decaer con el exponente  $\beta=3.49$  encontrado en la figura 4.6c). A frecuencias suficientemente altas, decaen con un exponente próximo a 3, como muestra la comparación con una ley de potencias con dicho  $\beta$ . Se encontró un comportamiento análogo para  $n_{\min}=2$ . La frecuencia máxima de la gráfica de Cagigal et al.,  $\nu \sim 4 \text{ mm}^{-1}$ , equivale a  $f=14$ .

En principio, la vía para conseguir que los espectros de potencias experimentales sigan con fidelidad las envolventes de las figuras 4.6 en un rango de frecuencias más grande consiste en estimar un mayor número de modos  $M$ , a fin de reducir el error derivado del truncamiento de la serie de Zernikes. No obstante, esta estrategia está limitada por el error debido al *aliasing*. Para introducir esta fuente de error, se utiliza la expresión (4.20), prescindiendo del sumando originado por el ruido del sensor. Para evaluar dicha ecuación, es necesario conocer los parámetros de la red de microlentes. De acuerdo con Cagigal et al., los autores emplearon el montaje de un estudio anterior (Prieto et al. 2000), pero con una red de microlentes con menor focal. Suponemos que el lado de las microlentes no fue modificado. En consecuencia, para el cálculo se usa una red similar a las de la figura 2.2, pero con un lado  $d = L = 0.1143 R_p$ . Además, se necesita postular un modelo de la aberración real. Por simplicidad, escogemos el de Kolmogorov. De nuevo, la matriz  $\mathbf{C}_\mu$  se calculó evaluando numéricamente las integrales del apartado 5.3.1, que usan el modelo de sensor dado por (2.28). Ese modelo también se usó para calcular los elementos de  $\mathbf{R}$ , por lo que se supone que no hay error en el modelo del sensor.



**Figura 4.8:** a) Efecto del *aliasing* de la estimación modal en el promedio angular  $\bar{P}_W(f)$  del espectro de potencias para estadística real de Kolmogorov, distintos valores de  $M$  y la corrección  $n_{\min} = 2$ ; b) contribución del ruido del sensor con varianza constante a  $\bar{P}_W(f)$ . Se usan polinomios de Zernike, subpupilas cuadradas de lado  $d = L = 0.1143 R_p$ , mínimos cuadrados y ausencia de error en el modelo de sensor. Las ordenadas de a) están en unidades de  $(\lambda/2\pi)^2 R_p^2 (R_p/p_0)^{5/3}$  y las de la b) en  $R_p^4 \sigma_\eta^2$ .

La figura 4.8a) muestra el promedio angular  $\bar{P}_W(f)$  del espectro de potencias estimado en ausencia de ruido, con estadística real de Kolmogorov, con una corrección  $n_{\min} = 2$  y diferentes valores de  $n_{\max}$ . Para la red de microlentes y el número de modos

usados por Cagigal et al.,  $n_{\max} = 8$ , el error de *aliasing* es despreciable, por lo que ese caso no se representa. La gráfica indica que al aumentar  $n_{\max}$  hasta 13 se consigue que la ley de potencias  $\beta = 3.365$  represente adecuadamente la envolvente de la curva hasta el cuarto máximo (para dicho  $n_{\max}$ ,  $f_{\max}$  crece hasta 2.51). No obstante, si se considera un número mayor de órdenes radiales, el *aliasing* provoca la sobreestimación del espectro de potencias en las altas frecuencias. También se ha observado, evaluando la ecuación (4.19), que el *aliasing* provoca asimetrías rotacionales en el espectro estimado de Kolmogorov. Para la corrección  $n_{\min} = 4$  se observa un comportamiento similar.

El valor de  $M$  a partir del cual el *aliasing* domina el error de estimación varía con la densidad de las microlentes. Para la red de la figura 2.2b), estadística real de Kolmogorov y corrección  $n_{\min} = 2$ , el *aliasing* ya provoca efectos apreciables en el espectro de potencias estimado para  $M = 35$ . Nótese también que, de acuerdo con (4.21), el volumen contenido por el espectro de potencias del frente estimado es igual a la suma de los valores cuadráticos medios de los modos de Zernike considerados [e igual a la suma de las varianzas si se considera el espectro del proceso  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ ]. Por tanto, el fenómeno está ligado al descrito en la figura 3.8a).

Falta estudiar el efecto de la propagación del ruido del sensor en el espectro. Dicha contribución se evalúa usando las expresiones (4.19) y (4.20). Se usa el modelo simple de ruido dado por (2.40), que supone varianzas iguales para las dos componentes del ruido en todas las microlentes y no correlación entre componentes o microlentes distintas. Con él,  $\mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T = \sigma_\eta^2\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ . Para el cálculo de la matriz  $\mathbf{R}$  se utiliza estimación por mínimos cuadrados,  $M = 44$  polinomios de Zernike y el resto de condiciones usadas en la figura 4.8a). De acuerdo con (3.90),  $\mathbf{R}_{\text{LS}}\mathbf{R}_{\text{LS}}^T = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}_M^T\mathbf{A}_M)^{-1}$ . La figura 4.8b) muestra el resultado obtenido para los grados de compensación  $n_{\min} = 2, 4$ . La curva se encuentra en unidades de  $R_p^4\sigma_\eta^2$ . A pesar de la simplicidad del modelo usado para el ruido del sensor, este se propaga al espectro de potencias de forma no trivial.

Las curvas de la figura 4.8b) para la propagación del ruido son similares a las obtenidas en las figuras 4.7a) y 4.7b) para el espectro de potencias de una aberración con estadística de Kolmogorov calculado en una pupila de radio finito y con un truncamiento en el desarrollo en Zernikes. De acuerdo con (4.19), para el caso del ruido la matriz  $\sigma_\eta^2\mathbf{R}\mathbf{R}^T$  juega el mismo papel que desempeñan para la señal las covarianzas  $\mathbf{C}_a$ . En la figura se incluye una ley de potencias con exponente de Kolmogorov,  $\beta = 11/3$ . A pesar de que la matriz  $\sigma_\eta^2\mathbf{R}\mathbf{R}^T$  no tiene nada que ver con el modelo de

Kolmogorov, el hecho de trabajar con pupilas de radio finito y con truncamientos en las series de polinomios hace que el espectro de potencias asociado a dicha matriz sea susceptible de ser atribuido al modelo de Kolmogorov si se aplica el análisis usado en la figura 2 de Cagigal et al. El objeto de la figura 4.8b) no es el de sugerir que los datos de dichos autores están dominados por ruido, sino observar que con su procedimiento no es difícil hallar modelos de estadística cuyos espectros de potencias son susceptibles de ser identificados incorrectamente como originados por el modelo de Kolmogorov.

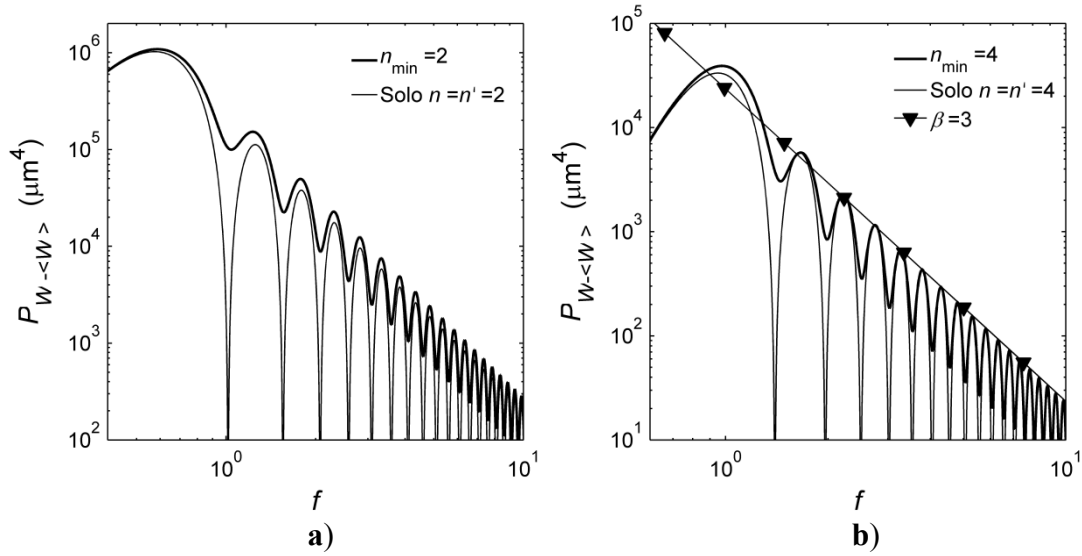
c) *Espectro de potencias con los datos de Thibos et al.*

En la figura 4.9 se presentan los espectros de potencias obtenidos al evaluar la ecuación (4.20) con la matriz de covarianzas  $\mathbf{B}_a$  de Thibos (Thibos 2009) para a)  $n_{\min} = 2$  y b)  $n_{\min} = 4$ . Esta matriz se obtuvo con una muestra diferente de ojos ( $K = 200$ , de 100 personas), con las ametropías corregidas,  $D_p = 6$  mm, otro HS y  $M = 35$  modos. El máximo de la función  $g_{7,7}(f)$  ocurre en  $f_{n_{\max}} = 1.48$ . Como se trata de datos experimentales, contienen el efecto de la propagación del ruido del sensor.

El uso de las covarianzas es más adecuado que el de las correlaciones, ya que Thibos et al. obtuvieron valores medios distintos de cero para algunos coeficientes, como el desenfoque y la aberración esférica. Para el modelo de Kolmogorov se cumple que  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle = 0$ , por lo que conviene compararlo con un proceso que también tenga valor medio cero, como  $\hat{W}(\mathbf{r}) - \langle \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle$ . Es inmediato comprobar que si en las expresiones de este apartado se emplea la matriz de covarianzas en lugar de la de correlación, se pasa de calcular el espectro de  $W(\mathbf{r})$  al de  $W(\mathbf{r}) - \langle W(\mathbf{r}) \rangle$  o de  $\hat{W}(\mathbf{r}) - \langle \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle$ . Como  $\mathbf{C}_a = \mathbf{B}_a + \langle \hat{\mathbf{a}} \rangle \langle \hat{\mathbf{a}} \rangle^T$ , si no se introduce este cambio los coeficientes con valor medio distinto de cero ven aumentado su peso en el espectro de potencias calculado con  $\mathbf{C}_a$ . En relación con esta cuestión, Cagigal et al. supusieron en su artículo que  $\langle \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle = 0$ . Para sustentar esta suposición, representaron un histograma de la aberración estimada acumulando los valores obtenidos en diferentes posiciones de pupila  $\mathbf{r}$  para todos los ojos. Obtuvieron una curva con forma de campana de valor medio cero, hecho que en su opinión justifica la suposición mencionada. El problema de este análisis es que el valor medio de ese histograma es una estimación del promedio espacial de  $\hat{W}(\mathbf{r})$ , promediado también entre ojos:  $\langle R_p^{-2} \int \Pi(\mathbf{r}/R_p) \hat{W}(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} \rangle$ . Esta magnitud es siempre cero para cualquier ojo por necesidad ya que la aberración estimada no incluye el modo de pistón. Es conveniente, pues, no prescindir de la dependencia del valor esperado  $\langle \hat{W}(\mathbf{r}) \rangle$  de la aberración con el punto  $\mathbf{r}$  de la pupila.



La figura 4.9b) muestra el espectro para el caso  $n_{\min} = 4$ . Como era de esperar, dado el uso de una pupila finita y el valor de  $f_{\max}$ , las leyes de potencia con exponentes  $\beta = 11/3$  o  $\beta = 3.49$  no describen adecuadamente la envolvente de los máximos locales del espectro, sino que decaen más rápidamente. En cambio,  $\beta = 3$  describe bien a la envolvente para frecuencias intermedias y altas. Usando sólo el ritmo de decrecimiento de la curva es difícil extraer alguna conclusión más. Como se ha visto, es posible que este decaimiento se deba al predominio del orden  $n = 4$  para la corrección empleada o que el exponente observado sea el resultado del truncamiento en  $M = 35$  de algún modelo con modos de alto orden relevantes, como el de Kolmogorov. En la gráfica también se representa la contribución de los modos con orden  $n = n' = 4$  según (4.20), así como la envolvente de su aproximación para frecuencias altas. Los máximos del espectro están completamente determinados por las varianzas del orden  $n = 4$ , salvo una pequeña contribución de  $n = 5$  al primer máximo. Esto muestra que el comportamiento observado se debe al dominio de los modos de más bajo orden.



**Figura 4.9:** Espectro de potencias  $\bar{P}_{\hat{W}-\langle\hat{W}\rangle}(f)$  para las covarianzas experimentales de Thibos et al. y a)  $n_{\min} = 2$  y b)  $n_{\min} = 4$ . La abscisa es la frecuencia normalizada  $f = R_p \nu$ .

La figura 4.9a) muestra el espectro para la corrección  $n_{\min} = 2$ . En este caso, los sumandos de (4.20) con orden  $n = n' = 2$  realizan la principal contribución al valor de los máximos de la curva, como se ve en la gráfica. Se puede ver que si se consideran los sumandos con órdenes  $n, n'$  entre 2 y 4, incluyendo los términos cruzados, se consigue reproducir completamente la curva de la figura 4.9a). También se comprueba que una ley de potencias con exponente 3 representa apropiadamente la envolvente del espectro

con esta corrección. En las muestras de ojos en las que los errores refractivos no estén corregidos el dominio de los modos de segundo orden ha de ser aún mayor.

#### *d) Conclusiones*

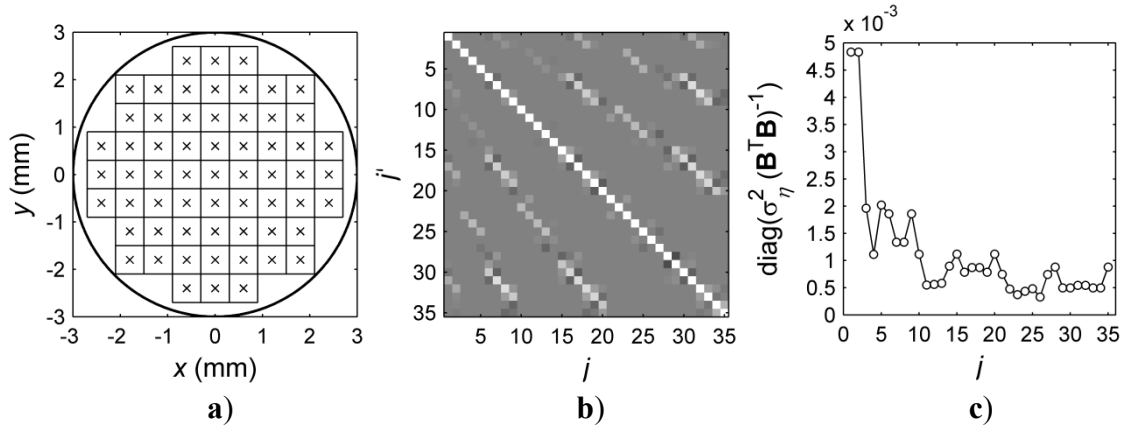
En resumen, el método de Cagigal et al. tiene ciertas ventajas, como que trabajar con modos de Zernike facilita el análisis e interpretación de los resultados. No obstante, la definición de la aberración estimada en una pupila finita, la estimación de un número finito de polinomios y el *aliasing* alteran el espectro de potencias de la aberración estimada y hacen que modelos con diferente estadística tengan comportamientos asintóticos susceptibles de ser atribuidos a Kolmogorov si su análisis no es cuidadoso. Las curvas obtenidas por Cagigal et al. pueden ser atribuidas a estadísticas con modos de órdenes  $n > 4$  con menos peso que en el modelo de Kolmogorov, en sintonía con las estimaciones experimentales de la matriz de covarianzas  $\mathbf{B}_a$  de otros autores.

#### **4.4.2 Estudios de Thibos et al. (2002)**

En este apartado se discute el modelo de estadística propuesto por Thibos et al., cuyas características se recogieron en la sección 4.1. Este modelo sostiene que el vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes de Zernike de una población de ojos con visión normal se comporta como un vector aleatorio gaussiano. Los momentos de primer y segundo orden de dicho vector se identifican con los correspondientes momentos del vector  $\hat{\mathbf{a}}$  de coeficientes estimados experimentalmente. Existe amplia información sobre este modelo, tanto en dos artículos del año 2002 como en otro más reciente, en el que se incluyen los valores numéricos de  $\langle \hat{\mathbf{a}} \rangle$  y  $\mathbf{B}_a$  (Thibos et al. 2002b, Thibos et al. 2002c, Thibos 2009). Los objetivos que se persiguen aquí son: a) usar los métodos del apartado 3.3.2 para estudiar las posibles influencias del proceso de estimación o del tamaño de la muestra de ojos en los elementos de la matriz de covarianzas  $\mathbf{B}_a$  cuando se usa la configuración experimental de Thibos et al. y modelos muy sencillos de las aberraciones reales y b) comparar el comportamiento experimental observado por Thibos et al. con el que originaría el modelo de Kolmogorov.

Como señala la expresión (3.86), al estudiar la matriz de covarianzas de los coeficientes estimados nos hemos de ocupar de los efectos de la representación por un número limitado de polinomios, del acoplamiento modal y de la propagación del ruido. Empezamos por el ruido, ya que su estudio no requiere de la postulación de un modelo de la estadística real de las aberraciones. Si se usa la estimación por mínimos cuadrados

y el modelo de ruido de la expresión (2.40), entonces el término de propagación es  $\sigma_\eta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$ . Por lo que respecta a los elementos de  $\mathbf{B}$ , aunque no se menciona de manera explícita en los artículos de Thibos et al., suponemos que sus elementos se calculan usando el modelo (2.29), el más común en aberrometría ocular. Se supone que el modelo (2.28) es el correcto y que, por tanto, hay un error en el modelo de sensor usado en la estimación. Según las fuentes, las microlentes del HS estaban distribuidas en una red cuadrada con un espaciado de  $L = 0.6$  mm (referido al plano de la pupila ocular) y se empleó un  $D_p = 6$  mm. Suponemos que las microlentes son cuadradas y que el factor de llenado es la unidad ( $d = L$ ). Un ejemplo de red de muestreo con estas características es la de la figura 4.10a), que se usa en las simulaciones de este apartado. En los cálculos se considera que esta red es la misma en todas las realizaciones, lo que conlleva no considerar posibles descentramientos de la pupila ocular.



**Figura 4.10:** a) Red de microlentes para la pupila ocular con  $D_p = 6$  mm utilizada en las simulaciones sobre el estudio de Thibos et al.; b) coeficientes de Pearson de la propagación del ruido usando  $\mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T = \sigma_\eta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$ , la red de la figura 4.10a), mínimos cuadrados, error en el modelo de sensor y  $M = 35$  polinomios de Zernike; c) diagonal de la matriz de propagación del ruido  $\sigma_\eta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$  (en unidades de  $\sigma_\eta^2 R_p^2$ ), que muestra la contribución a la varianza de cada coeficiente de Zernike estimado  $j$ .

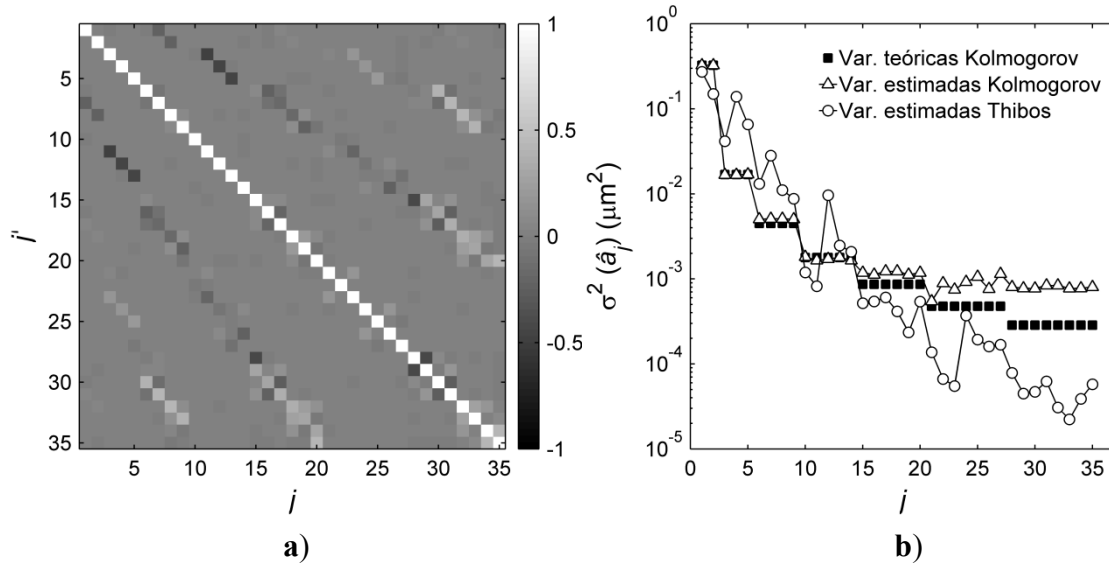
La figura 4.10b) da los coeficientes de correlación de Pearson de la propagación del ruido con  $\mathbf{R}\mathbf{C}_\eta\mathbf{R}^T = \sigma_\eta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$  y  $M = 35$ . Para calcular el peso de la contribución del ruido en  $\mathbf{R}_a$  habría que conocer la SNR del sensor para la muestra de ojos. La matriz obtenida no es diagonal, por lo que no sólo las varianzas de los coeficientes estimados se ven perturbadas por el ruido, sino también las correlaciones cruzadas entre modos distintos. En particular, para la red de la figura 4.10a) y polinomios de Zernike, el efecto del ruido afecta sobre todo a las correlaciones entre modos con el mismo orden  $n$  o frecuencia  $m$ . La figura 4.10c) muestra los elementos de la diagonal de la matriz de propagación del ruido. Esta gráfica representa la contribución de la propagación del

ruido del sensor a la varianza de cada coeficiente estimado  $j$ , en unidades de  $\sigma_\eta^2 R_p^2$ . Con la excepción de los términos de prisma, la curva decae muy lentamente. A partir de  $j=10$  apenas hay decaimiento, lo que contrasta con el rápido decrecimiento observado por Thibos et al. para las varianzas  $\sigma^2(\hat{a}_j)$  de los coeficientes estimados. Si el modelo de ruido usado es apropiado, entonces el error relativo en los coeficientes de Zernike estimados ligado a la propagación del ruido del sensor crece fuertemente con  $n$ .

Ocupémonos del efecto del acoplamiento modal en la matriz de covarianzas. Según (3.86), es necesario evaluar la matriz  $(\mathbf{R}\mathbf{A})\mathbf{B}_a(\mathbf{R}\mathbf{A})^T = \mathbf{R}\mathbf{B}_\mu\mathbf{R}^T$ . Para ello, lo primero es postular un determinado modelo para la estadística del frente real, que tendrá asociadas unas matrices  $\mathbf{B}_a$  y  $\mathbf{B}_\mu$ . Los modelos de este apartado son particularmente simples y se emplean únicamente a fin de estudiar los efectos del acoplamiento modal, pero sin ninguna pretensión de validez. En primer lugar, dado que ha sido sugerido en otros estudios para describir a la estadística ocular, supongamos que la estadística real de las aberraciones es la de Kolmogorov. Este modelo, como se ve en la figura 3.7a), presenta correlaciones no nulas entre modos con la misma frecuencia angular  $m$ , aunque las correlaciones entre prismas y comas y entre desenfoque y aberración esférica son negativas (al contrario de lo que sucede en la figura 4.1) y las varianzas de los órdenes radiales decaen más lentamente que en el modelo de Thibos et al. (Devaney et al. 2008). Para calcular la matriz  $\mathbf{B}_a$ , se emplea el mismo procedimiento que en la figura 3.7b): se evalúa  $\mathbf{B}_\mu$  usando las expresiones del apartado 5.3.1, lo que evita tener que usar un  $M'$  finito. En la simulación, se reescalan las varianzas del modelo de Kolmogorov y las varianzas de los coeficientes estimados usando el mismo factor ambos casos: el que iguala la suma de varianzas  $\langle \hat{a}_j^2 \rangle$  de los coeficientes estimados con Kolmogorov con la suma de las varianzas  $\sigma^2(\hat{a}_j)$  medidas por Thibos. Se usa esta normalización porque se desconocen las varianzas de los coeficientes reales de la población de ojos y si estas se ven afectadas significativamente por la estimación. El valor de la suma de las varianzas  $\sigma^2(\hat{a}_j)$  para Thibos es de  $0.751 \mu\text{m}^2$  para una pupila de 6 mm y  $M=35$ .

La figura 4.11a) presenta la matriz de covarianzas de los coeficientes estimados obtenida suponiendo estadística real de Kolmogorov, la red de la figura 4.10a),  $M=35$  polinomios de Zernike, error en el modelo de estimación y ausencia de ruido. Al igual que sucedía con la matriz de coeficientes reales, la matriz de coeficientes estimados de Kolmogorov predice correlaciones negativas entre los modos de prisma y coma con misma frecuencia  $m$  y entre el desenfoque y la aberración esférica, al revés de lo observado en la matriz de la figura 4.1a). En la figura 4.11b) se comparan las varianzas

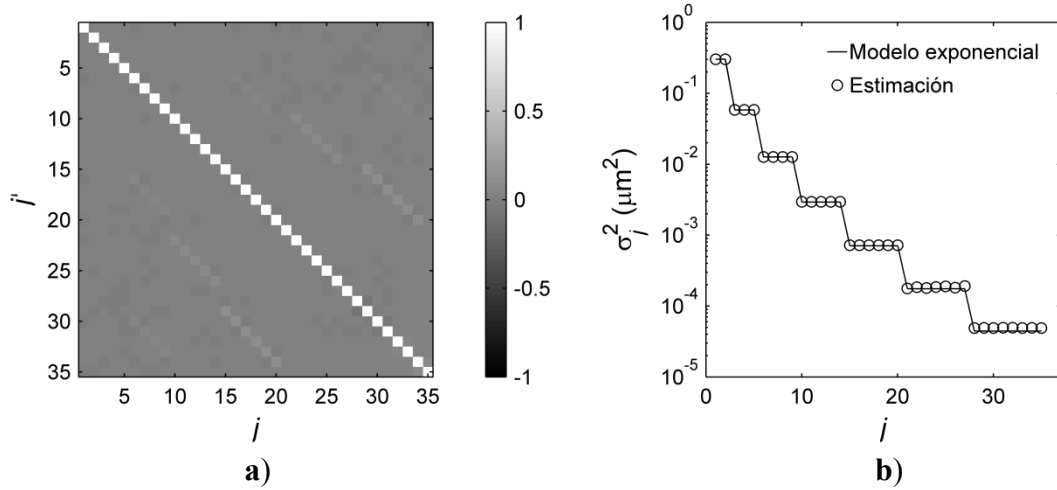
de los coeficientes estimados obtenidos por Thibos con las varianzas teóricas del modelo de Kolmogorov y con la diagonal de la matriz de la figura 4.11a). El modelo teórico de Kolmogorov no describe bien los datos de Thibos et al. Con el factor de escalado empleado, el modelo de Kolmogorov subestima el valor de las varianzas para modos  $j$  de orden no muy elevado y sobreestima las varianzas para modos de más alto orden. Si se incluye el efecto de la estimación en el modelo de Kolmogorov, el *aliasing* afecta a los modos de orden  $n=6, 7$ , haciendo que las varianzas observadas sean de la misma magnitud que para  $n=5$ . Este comportamiento aleja todavía más las varianzas de alto orden de los valores obtenidos por Thibos. Por tanto, aun considerando los efectos de *aliasing*, el modelo de Kolmogorov no explica los datos observados por Thibos et al.



**Figura 4.11:** a) Coeficientes de Pearson del vector  $\hat{\mathbf{a}}$  de coeficientes estimados obtenido con un modelo real de Kolmogorov, un patrón de muestreo similar al de Thibos et al. (la red de la figura 4.10a y  $M=35$  polinomios de Zernike) y ausencia de ruido. b) Comparación de las varianzas obtenidas experimentalmente por Thibos et al. con las varianzas teóricas del modelo de Kolmogorov y con las varianzas estimadas usando las mismas suposiciones que en a).

Consideremos otro modelo de la aberración real. Por ejemplo, supongamos que  $\mathbf{B}_a$  es una matriz diagonal (los coeficientes del frente real no están correlacionados) y que la magnitud de las varianzas decrece con el orden radial  $n$  de acuerdo con la ley empírica (4.1) obtenida a partir de los coeficientes estimados. Se supone que esta dependencia es válida más allá del orden máximo  $n=7$  estimado en el estudio de Thibos et al. A falta de información acerca de cómo se distribuye esta varianza entre los modos de los órdenes superiores, se supone que el reparto es uniforme entre los  $n+1$  modos de cada orden (Arines et al. 2009); somos conscientes de que esto no se corresponde con lo

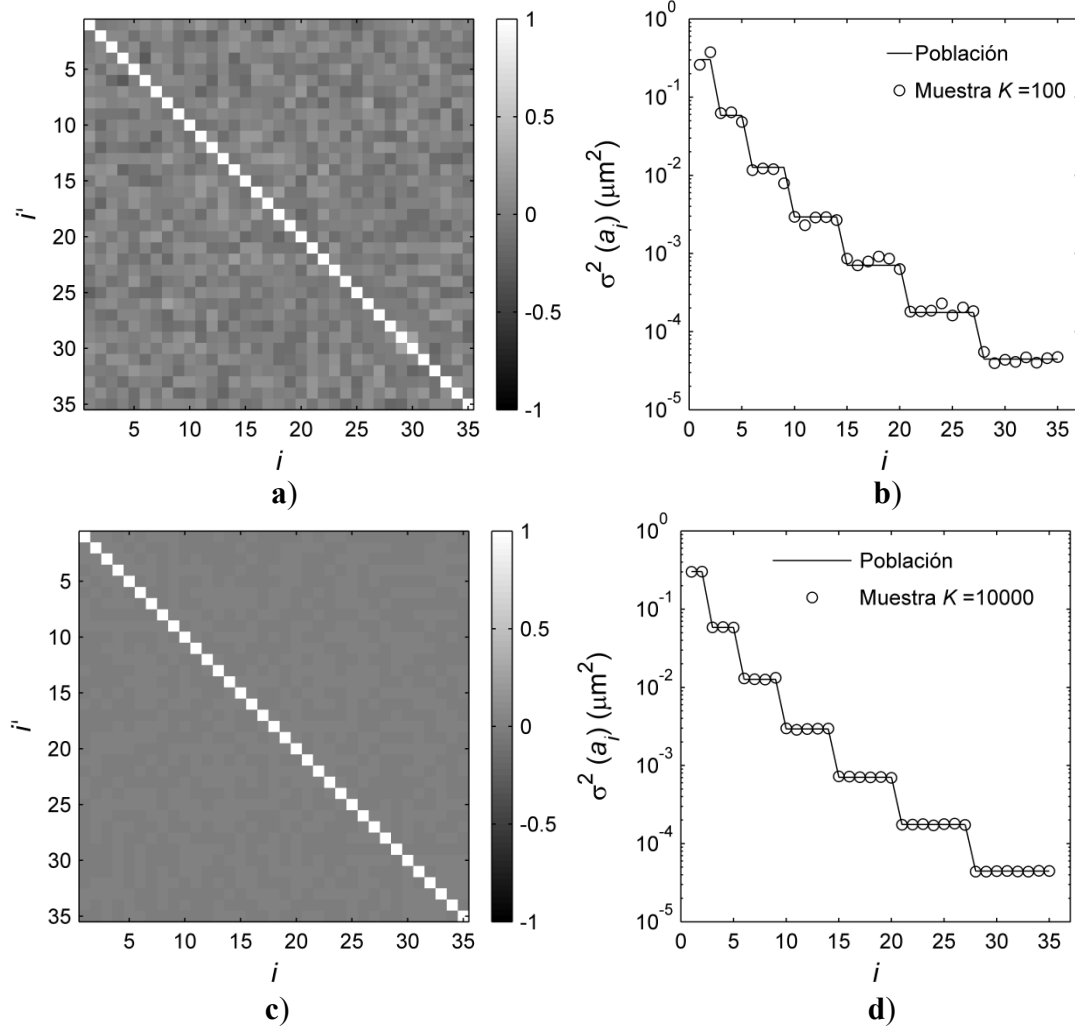
observado para modos de menor orden como la aberración esférica. Para construir la ley exponencial, se toman los parámetros que se obtienen al ajustar por mínimos cuadrados la ecuación (4.1) a los datos de la figura 4.1b), donde hay varianzas de los coeficientes en lugar de valores cuadráticos medios:  $b_{Th} = 2.09 \mu m^2$ ,  $c_{Th} = 1.24$  ( $R^2 = 0.990$ ). El modelo de estadística postulado exige que se encuentre un origen alternativo al de  $\mathbf{B}_a$  para todos los elementos de la matriz  $\mathbf{B}_a$  situados fuera de la diagonal (cf. la figura 4.1).



**Figura 4.12:** a) Coeficientes de Pearson del vector  $\hat{\mathbf{a}}$  de coeficientes estimados, sin ruido. Se usa la configuración de Thibos et al. y una matriz  $\mathbf{B}_a$  de coeficientes reales no correlacionados cuyas varianzas decaen exponencialmente con  $n$ . b) Varianzas  $\sigma_j^2$  de los coeficientes del modelo con decaimiento exponencial (línea) y de los coeficientes estimados con este modelo y sin ruido (círculos).

Para simular el efecto del acoplamiento modal, se ha de determinar el número  $M'$  de modos a incluir en  $\mathbf{B}_a$ . Para ello, se utiliza como métrica la norma de Frobenius de  $(\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{a}}} - \mathbf{B}_{a_M})$  en ausencia de ruido. Esta norma es igual a la raíz de la suma de los cuadrados de todos los elementos de la matriz. La matriz  $\mathbf{B}_{a_M}$  está formada por los primeros  $M \times M$  elementos de  $\mathbf{B}_a$  [cf. (3.88)]. La norma se grafica frente a  $M'$  (para  $M' > M$ ) y se determina el número de modos a partir del cual su valor se satura. Para cada valor de  $M'$  se usa una matriz  $\mathbf{A}$  diferente, mientras que  $\mathbf{R}$  es la misma en toda la curva. La métrica se satura a partir de  $n' \cong 11$  ( $M' = 77$ ). Se usa un valor de  $n'$  algo mayor:  $n' = 15$  ( $M' = 135$ ). El resultado del cálculo se muestra en la figura 4.12a). Se comprueba que las correlaciones introducidas por el acoplamiento modal son de poca magnitud. Fuera de la diagonal, las más relevantes son algunas entre modos con la misma frecuencia angular  $m$ , que se deben al error de modelado considerado al calcular la matriz  $\mathbf{R}$  (cf. la figura 3.2b). Por tanto, para el modelo de estadística real supuesto, el acoplamiento modal no basta para explicar muchos de los aspectos de la estadística de

los coeficientes estimados observados en la figura 4.1. En la figura 4.12b) se grafican las varianzas de los coeficientes  $a_j$  del modelo con coeficientes no correlacionados y decaimiento exponencial, así como las varianzas de los coeficientes estimados  $\hat{a}_j$  con ese modelo y sin ruido. La influencia del acoplamiento modal sobre las varianzas del modelo de coeficientes no correlacionados también es escasa.



**Figura 4.13:** Influencia del tamaño  $K$  de la muestra de ojos en la matriz de covarianzas del modelo de coeficientes no correlacionados con decaimiento exponencial. Las figuras a) y c) muestran la matriz de covarianza de la muestra  $\mathbf{S}_a$  para  $K=100$  y  $K=10000$ , respectivamente. Las figuras b) y d) comparan las varianzas de los coeficientes para muestras con  $K=100$ , 10000 con las varianzas poblacionales.

Hay un aspecto de la figura 4.1a) que llama la atención. En general, los elementos  $(\mathbf{B}_a)_{j',j}$  con frecuencia  $m_j \neq m_{j'}$ , son de valor moderado en comparación con las varianzas  $\sigma^2(\hat{a}_j)$  y  $\sigma^2(\hat{a}_{j'})$ . No obstante, en muchos otros casos los coeficientes de Pearson de estos modos llegan a valer del orden de  $\pm 0.2$ . Estos valores son mucho mayores que los correspondientes elementos de las matrices 4.11a) y 4.12a) de coeficientes de Pearson, que están asociadas a modelos de aberraciones reales en cuyas

matrices de covarianzas  $\mathbf{B}_a$  estos elementos son cero. De acuerdo con la figura 4.10b), este comportamiento no es atribuible a la propagación del ruido, al menos si se usa el modelo de (2.40). Cabe preguntarse si la matriz de la figura 4.1a) exige la consideración de modelos teóricos de la aberración con correlaciones cruzadas relevantes para estos elementos o si esta característica tiene un origen diferente. Veremos que probablemente se produzca porque en la práctica se dispone de muestras formadas por un número finito  $K$  de medidas. En particular, Thibos et al. usaron una muestra de 200 ojos de 100 personas, lo que introduce cierta aleatoriedad en los elementos de la matriz de covarianzas de los coeficientes estimados. Conforme  $K$  crezca, la matriz ha de aproximarse a la predicción dada por (3.86).

Consideremos una muestra de  $K$  realizaciones de las aberraciones. Sea  $\mathbf{S}_a$  el estimador sin sesgo de la matriz de covarianzas de los coeficientes reales  $\mathbf{B}_a$  para dicha muestra. Por tanto, si  $\langle \mathbf{a} \rangle_K$  es el valor medio de la muestra:

$$\mathbf{S}_a = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K \left[ \mathbf{a}^{(k)} - \langle \mathbf{a} \rangle_K \right] \left[ \mathbf{a}^{(k)} - \langle \mathbf{a} \rangle_K \right]^T \quad (4.22)$$

Centrémonos en los primeros  $M \times M$  elementos de la matriz de covarianzas de los coeficientes reales y prescindamos del acoplamiento modal. Si  $\mathbf{a}$  es un vector aleatorio gaussiano, entonces  $(K-1)\mathbf{S}_a$  es una matriz aleatoria de Wishart con  $K-1$  grados de libertad (Johnson y Wichern 2002: 174). La distribución de Wishart es una generalización multidimensional de la distribución de chi cuadrado, que a su vez describe la estadística de la varianza de la muestra de una variable aleatoria gaussiana. Usando los momentos de la distribución de Wishart (Mardia et al. 1979: 66 y 92):

$$\langle (\mathbf{S}_a)_{i,j} \rangle = (\mathbf{B}_a)_{i,j}; \quad \text{var} \{ (\mathbf{S}_a)_{i,j} \} = (K-1)^{-1} \left[ (\mathbf{B}_a)_{i,j}^2 + \sigma^2(a_i) \sigma^2(a_j) \right] \quad (4.23)$$

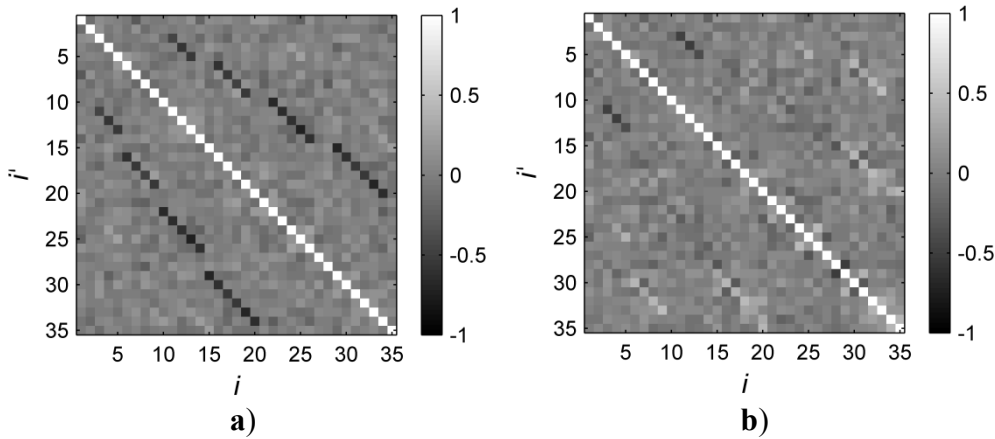
El siguiente cociente adimensional proporciona la magnitud de las oscilaciones de los coeficientes de Pearson obtenidos con la muestra de  $K$  elementos:

$$s \equiv \frac{\text{std} \{ (\mathbf{S}_a)_{i,j} \}}{\sigma(a_i) \sigma(a_j)} = \frac{1}{(K-1)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{(\mathbf{B}_a)_{i,j}^2}{\sigma^2(a_i) \sigma^2(a_j)} \right]^{1/2} \quad (4.24)$$

Si se considera un elemento  $i, j$  para el que  $(\mathbf{B}_a)_{i,j} = 0$  en el modelo estudiado, entonces  $s = 1/\sqrt{K-1}$ . Para un número de realizaciones  $K=100$  similar al usado por Thibos,  $s = 0.10$ . Por tanto, la desviación típica de los elementos de  $\mathbf{S}_a$  debida al valor finito de  $K$  sólo es un orden de magnitud inferior que el producto de las desviaciones típicas correspondientes.



Las figuras 4.13a) y 4.13c) muestran la matriz  $\mathbf{S}_a$  para  $K=100$  y 10000 muestras, respectivamente, suponiendo que la estadística real de la población es la dada por el modelo con coeficientes de Zernike no correlacionados y decaimiento exponencial de las varianzas. Para este modelo se supone que  $\mathbf{a}$  es un vector aleatorio gaussiano con valor medio cero y con la matriz de covarianzas diagonal  $\mathbf{B}_a$  ya descrita, lo que se usa para generar realizaciones individuales de dicho vector. Se presenta únicamente el primer bloque  $M \times M$ . Las figuras 4.13b) y 4.13d) comparan las varianzas de las matrices  $\mathbf{S}_a$  de una muestra finita de ojos con las varianzas del modelo teórico de la población. En relación con el caso  $K=100$ , las varianzas de los coeficientes de la muestra muestran ahora cierta variabilidad dentro de cada orden radial (compárese con la figura 4.12b), aunque siguen siendo del mismo orden de magnitud que las varianzas de los coeficientes poblacionales y preservan el ritmo de decaimiento con  $n$ .



**Figura 4.14:** Matrices de covarianza a)  $\mathbf{S}_a$  y b)  $\mathbf{S}_a$  de los coeficientes de Zernike para una muestra de  $K=100$  frentes de onda que siguen la estadística de Kolmogorov. En a) solo se considera el primer bloque  $M \times M$  de la matriz, aunque se usan vectores  $\mathbf{a}$  con  $M'=495$  modos; en b) se usa el mismo patrón de muestreo que en la figura 4.11.

Por lo que respecta al modelo de Kolmogorov, su matriz de covarianzas no es diagonal. Por tanto para generar realizaciones individuales del vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes reales se usa la descomposición de Cholesky. Se ha visto que el acoplamiento modal no es despreciable para este modelo y el patrón de muestreo usado en la figura 4.11, por lo que se toma la estimación en consideración. Las figuras 4.14a) y 4.14b) muestran a  $\mathbf{S}_a$  y a  $\mathbf{S}_a$  para la estadística de Kolmogorov y las mismas  $K=100$  realizaciones. Nótese, en particular, cómo en el caso de  $\mathbf{S}_a$  el efecto conjunto de la estimación y del tamaño finito de la muestra enmascaran en gran medida la estructura de la matriz poblacional de coeficientes reales,  $\mathbf{B}_a$ , mostrada en la figura 3.7a). Esta estructura se preserva visiblemente peor que en la matriz  $\mathbf{B}_a$  de la figura 4.11a) y que en la matriz  $\mathbf{S}_a$  de la

figura 4.14a), donde sólo se considera la contribución de uno de los dos factores. Se concluye, por tanto, que el tamaño de la muestra de ojos es un factor importante a tener presente que, al igual que el proceso de estimación, puede haber jugado un papel relevante en los datos observados por Thibos et al.

## Capítulo 5

# ESTADÍSTICA DE ABERRACIONES A PARTIR DE LOS CENTROIDES

En este capítulo se presentan los métodos utilizados en la tesis para estudiar la compatibilidad de modelos de la estadística espacial de las aberraciones oculares con los datos experimentales, que son los desplazamientos de los centroides medidos por un HS. Tanto el efecto del patrón de muestreo del sensor como la influencia del ruido de estimación de los centroides se incluyen de manera explícita.

En la sección 5.1 se introduce la filosofía general del procedimiento y se muestra que es posible y ventajoso para nuestros fines usar directamente las magnitudes estadísticas de los centroides, sin necesidad de estimar la función de aberración. A continuación, en la sección 5.2 se introducen los diagramas de centroides, una herramienta que permite obtener información inicial útil acerca de la estadística de la población de funciones de aberración considerada. En particular, se discute la relación de la forma de las nubes de centroides representadas en este diagrama con la homogeneidad e isotropía estadísticas de las aberraciones y con determinados candidatos a modelos de estadística. La sección 5.3 presenta la función de estructura y otras magnitudes de segundo orden de los gradientes del frente de ondas, análogas a las definidas en el apartado 3.1.1 para las aberraciones. La comparación entre las predicciones teóricas de los valores de estas magnitudes proporcionadas por modelos de la estadística de las aberraciones con las estimaciones de estas mismas funciones a partir de los datos experimentales es la base sobre la que se asienta el método presentado. El criterio de comparación usado es una prueba de chi cuadrado. En el apartado 5.3.1 se hallan las expresiones particulares de la función de estructura de los gradientes del frente y de otras magnitudes asociadas cuando las microlentes del sensor son cuadradas y las aberraciones son homogéneas o isótropas. En la sección 5.4 se introducen

diferentes candidatos a modelar la estadística de las aberraciones oculares y se discuten las expresiones que adoptan para ellos las magnitudes de la sección 5.3. El primer candidato es un modelo tipo ley de potencias (apartado 5.4.1), una generalización del modelo de Kolmogorov, mientras que el segundo es un modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque en presencia de movimientos de pupila (apartado 5.4.2). También se estudian las modificaciones que se producen en este último modelo al incluir fluctuaciones de prisma y de astigmatismo (subapartados 5.4.2a y 5.4.2b). Finalmente, en la sección 5.5 se discute y se ilustra la aplicación de los métodos presentados al estudio de la estadística de dos ojos individuales, cuyas medidas se tomaron en un estudio preliminar usando un sensor diferente al descrito en el capítulo 6.

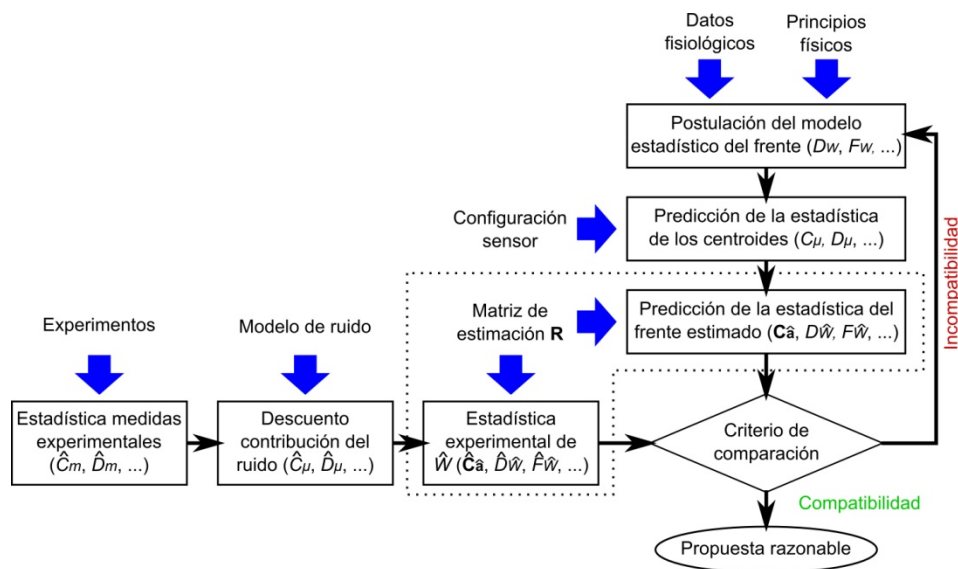
## 5.1 Estudio de propuestas de modelos de estadística

Como se comentó en el capítulo 4, ante la ausencia en óptica ocular de modelos de la estadística espacial de las aberraciones algunos autores han optado por identificar directamente las magnitudes estadísticas de la función de aberración real con las magnitudes de la aberración estimada por el sensor. Por ejemplo, los elementos de la matriz de correlaciones  $C_a$  de los coeficientes de Zernike reales se calculan directamente promediando la matriz  $\hat{a}\hat{a}^T$  de los coeficientes estimados entre las  $K$  medidas disponibles. Un problema asociado a este método es que no tiene presente las modificaciones que el sensor y el proceso de estimación introducen en la estadística de las aberraciones estimadas respecto de la estadística de la aberración real (cf. secciones 3.3 y 4.4). Además, algunos de los errores introducidos son sistemáticos, por lo que no pueden reducirse aumentando el número  $K$  de medidas.

Una posible vía para estudiar la estadística espacial de las aberraciones consiste en partir de una determinada propuesta de modelo de estadística y calcular para ella las modificaciones que sensor, estimador y ruido introducen en las funciones estadísticas de la aberración estimada. Una vez calculadas las predicciones teóricas de estas magnitudes, sus valores se pueden comparar con los obtenidos a partir de las medidas experimentales, por ejemplo con una prueba chi cuadrado. Si el resultado de la prueba indica que predicciones y medidas no son compatibles, entonces se deberá descartar el candidato de estadística propuesto e intentar encontrar otra hipótesis con un mayor nivel de acuerdo. En caso contrario, se concluye que las predicciones y las medidas son compatibles para el nivel de incertidumbre presente en los datos. En ningún caso se

puede asegurar completamente la validez de una propuesta basándose solo en una prueba de este tipo, ya que es posible que existan modelos muy diferentes que ofrezcan un buen comportamiento.

En la figura 5.1 se presenta un diagrama del procedimiento popperiano (o falsacionista) propuesto en el párrafo anterior. Como se indica, el primer paso consiste en la postulación de un modelo para la estadística espacial de las aberraciones, que tiene asociadas sus correspondientes funciones de segundo orden [e. g., la función de estructura  $D_W(\mathbf{p})$  o el espectro de potencias  $F_W(\mathbf{v})$ ]. A continuación, el conocimiento del modelo teórico del sensor HS (cf. apartado 2.2.2) permite expresar las funciones estadísticas de los gradientes  $\mu(\mathbf{r}_n)$  en función de las correspondientes magnitudes del frente de ondas. Las predicciones teóricas de los valores de estas magnitudes se evalúan usando el mismo patrón de muestreo que en los experimentos. Tras ello, la aplicación de la matriz de estimación  $\mathbf{R}$  elegida permite obtener las predicciones de las magnitudes estadísticas del frente estimado  $\hat{W}(\mathbf{r})$ . Estas predicciones se han de comparar, usando un determinado criterio, con la estimación de las mismas funciones a partir de los datos experimentales. Estos últimos pasos requieren de un modelo de ruido que permita descontar la contribución del mismo a la estadística de las medidas, así como de una nueva aplicación de  $\mathbf{R}$ .



**Figura 5.1:** Procedimientos para la falsación de propuestas de modelos de estadística.

El método de estudio de la estadística de la función de aberración estimada por el sensor que se propone en la figura 5.1 tiene aspectos atractivos. El uso de magnitudes de la función de aberración o de su desarrollo en Zernikes permite analizar de manera

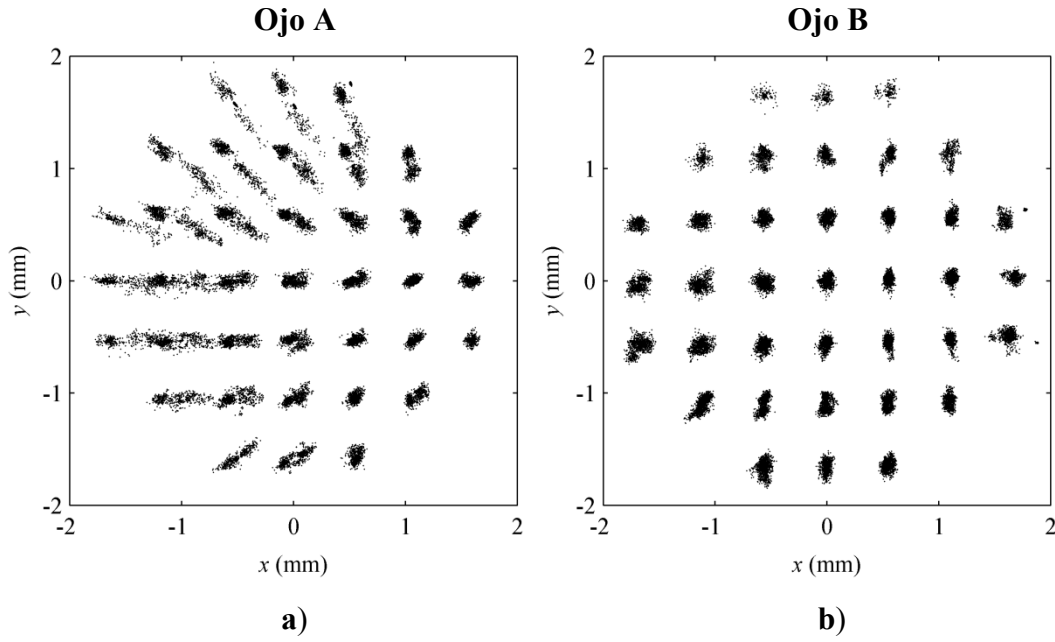
intuitiva y familiar los efectos introducidos por sensor, ruido y estimador. No obstante, también presenta inconvenientes. Por ejemplo, en el procedimiento de estimación de las aberraciones se produce una reducción de la cantidad de información disponible. Esto se debe a que los  $M$  parámetros que describen el frente estimado se calculan a partir de un número  $2N$  mayor de datos experimentales. Aunque la información proporcionada por los parámetros del frente estimado (por ejemplo, por el vector  $\hat{\mathbf{a}}$  de coeficientes) es más fácil de interpretar que la dada por los desplazamientos de los centroides, eso no significa que esta pérdida no tenga lugar. Además, la matriz de estimación  $\mathbf{R}$  no es única, sino que depende de factores tales como el número y distribución de microlentes, el modelo de sensor usado para calcular sus elementos o el tipo de estimador. Incluso en la situación habitual en óptica ocular de uso del estimador modal de mínimos cuadrados sin ponderar con polinomios de Zernike, el número  $M$  de coeficientes reconstruidos sigue siendo un parámetro a elegir por parte del investigador. Diferentes elecciones de  $\mathbf{R}$  originan diferentes estadísticas de la función de aberración estimada, lo que dificulta la comparación de resultados entre laboratorios.

Si se observa el diagrama de la figura 5.1, se comprueba que el paso de reconstrucción de las aberraciones se produce en las dos ramas. Como nuestro objetivo consiste en el estudio de la compatibilidad con las observaciones experimentales del modelo de la estadística del frente, se ha de concluir que en este caso incluir la reconstrucción sólo aumenta la complejidad del método. Es suficiente con detenerse en el paso anterior y realizar la comparación entre las magnitudes estadísticas de los centroides, ya que toda la información relevante acerca de la estadística de las aberraciones reales está contenida en ellos. Este procedimiento se corresponde con la eliminación de los pasos situados dentro de la línea de puntos de la figura 5.1.

## 5.2 Diagramas de centroides

Se denomina “diagrama de centroides” a la gráfica en la que se representan las posiciones de los centroides de los *spots* de irradiancia de todas las subaperturas de un sensor HS para la muestra de  $K$  realizaciones de las aberraciones considerada. En consecuencia, en esta gráfica cada una de las microlentes tiene asociada una nube de  $K$  puntos. Debido a que la magnitud de los desplazamientos de los centroides es pequeña en comparación con la separación entre las microlentes del sensor, en las figuras a los desplazamientos se les aplica un factor de aumento para facilitar su visualización (no así

a la distancia entre microlentes). Su principal utilidad consiste en que proporcionan información acerca de la estadística que sigue la función de aberración o, al menos, acerca de ciertas propiedades de dicha estadística, como la homogeneidad y la isotropía. La figura 5.2 muestra dos ejemplos de diagramas de centroides para dos ojos medidos en el laboratorio de nuestro grupo. Cada uno de ellos representa las medidas tomadas para un ojo en diferentes instantes de tiempo. Los diagramas indican que la estadística de estos dos ojos es muy diferente.



**Figura 5.2:** Ejemplos de diagramas de centroides obtenidos para dos ojos, “ojo A” y “ojo B”, con un sensor HS con 37 microlentes cuadradas. Los desplazamientos de los centroides respecto de su valor medio en cada microlente se aumentaron un factor  $Q=5$ . No se siguió a la pupila ocular. Para el ojo A,  $K=725$ , mientras que para el B  $K=1046$ . Figura reproducida de la publicación original (Pailos et al. 2010).

En la figura 5.2 se ha aplicado un factor de aumento  $Q=5$  a las fluctuaciones de los centroides respecto de sus valores medios. Si  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_n)$  da la posición de uno de los centroides respecto a un sistema de referencia común a todas las microlentes, entonces el factor de aumento se aplica de acuerdo con<sup>2</sup>:

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}_n) \rightarrow \langle \mathbf{c}(\mathbf{r}_n) \rangle + Q[\mathbf{c}(\mathbf{r}_n) - \langle \mathbf{c}(\mathbf{r}_n) \rangle] \quad (5.1)$$

El diagrama de centroides es la representación en una única figura de los  $N$  diagramas de dispersión de las componentes  $\Delta \mathbf{c}(\mathbf{r}_n) = [\Delta c_x(\mathbf{r}_n) \ \Delta c_y(\mathbf{r}_n)]^T$  de los

<sup>2</sup> Para simplificar la notación del capítulo 2, se usará  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_n)$  (sin prima) para referirse a las posiciones de los centroides de irradiancia en el plano de la cámara. Además, se empleará indistintamente  $\mathbf{r}_n$  o  $\mathbf{c}_R(\mathbf{r}_n)$  para referirse a las posiciones de referencia determinadas con el uso de una onda plana.

desplazamientos de los centroides de las microlentes. Como sucede con este tipo de gráficas, el diagrama de centroides es útil para la detección de valores atípicos.

El resto de la sección estudia la conexión entre las formas de las nubes de centroides del diagrama y la homogeneidad e isotropía de las variaciones de la función de aberración respecto de su valor medio,  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ . En primer lugar, se comprueba que:

- i. Si  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es homogénea y todas las microlentes del sensor son iguales (tienen la misma forma, tamaño y orientación), entonces las fluctuaciones de las componentes de los centroides (sin ruido),  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) = \mu_u(\mathbf{r}_n) - \langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle$  con  $u = \{x, y\}$ , también son homogéneas.

Como el modelo del sensor HS es lineal,  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  es el desplazamiento de los centroides asociado a la variación  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  de la aberración respecto de su valor medio. Que  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  sea homogéneo conlleva que las varianzas  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de cada componente  $u$  sean iguales para todas las microlentes, con independencia de la posición  $\mathbf{r}_n$  de su centro. Estas varianzas proporcionan una medida de la extensión de las nubes de centroides en cada una de las dos direcciones ortogonales (se obvia el efecto del ruido).

La propiedad i muestra que el trabajo con desplazamientos de centroides es ventajoso si se desea estudiar una propuesta de modelo homogéneo de las aberraciones. Como vemos, si las subpupilas del sensor cumplen unos requerimientos comunes, las componentes de los desplazamientos preservan la homogeneidad, lo que simplifica el análisis de las magnitudes estadísticas de interés. En cambio, como se comentó en el apartado 3.3.1, las aberraciones estimadas  $\hat{W}(\mathbf{r})$  no conservan necesariamente la homogeneidad.

La clave para demostrar i consiste en que cuando todas las microlentes son iguales el modelo del sensor viene dado por la integral de convolución (2.28). Se ha de comprobar que  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  es homogéneo usando dicha expresión. Como el valor esperado de este proceso es igual a cero por definición, basta con probar que su autocorrelación,  $C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \langle \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_t) \rangle$ , sólo depende del vector  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t$  que separa los centros de las subpupilas. Usando, por tanto, la componente  $u$  de (2.28):

$$C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = A^{-2} \iint d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{\partial u} \frac{\partial T(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_t)}{\partial u'} C_{\tilde{W}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5.2)$$

Ahora se emplea que, por hipótesis, las variaciones de la función de aberración son homogéneas. En consecuencia, su autocorrelación sólo depende del vector que une los



puntos considerados en pupila. Por tanto,  $C_{\tilde{W}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = C_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Gracias a la homogeneidad de las variaciones de la aberración, la expresión (5.2) se puede expresar fácilmente en función de la función de estructura  $D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Dicha relación se usará en las siguientes secciones, por lo que se deduce aquí. Empleando la relación (3.4) y siguiendo el mismo argumento que al derivar (3.69):

$$C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = -\frac{1}{2} A^{-2} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{\partial u} \frac{\partial T(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_t)}{\partial u'} D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.3)$$

Aplicando los cambios de variables  $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_n$ , se obtiene que:

$$C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = -\frac{1}{2} A^{-2} \int d^2\tilde{\mathbf{r}} \frac{\partial T(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{u}} \int d^2\tilde{\mathbf{r}}' \frac{\partial T(\tilde{\mathbf{r}}')}{\partial \tilde{u}'} D_{\tilde{W}}[(\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}') + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t)] \quad (5.4)$$

En (5.4) hay una integral doble espacial de convolución y otra de correlación, lo que basta para probar que  $C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t)$  (Barrett y Myers 2004: 395).

Como se ha comentado, la homogeneidad de  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  conlleva que las varianzas de las componentes de los desplazamientos de los centroides toman los mismos valores en todas las subpupilas. Esta propiedad también puede ser deducida a partir de la expresión analítica de  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  para  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  homogéneo. A partir de (5.4):

$$\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = C_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) = -\frac{1}{2} A^{-2} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial u} \frac{\partial T(\mathbf{r}')}{\partial u'} D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.5)$$

En efecto, el resultado  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \tilde{\mu}_u^2 \rangle$  es independiente del centro  $\mathbf{r}_n$  de la microlente.

Otra magnitud de interés relacionada con la forma de las nubes de puntos de las subpupilas es la correlación (o covarianza) cruzada de las dos componentes ortogonales de las fluctuaciones de los desplazamientos de los centroides en una misma microlente. Esta magnitud se define como:

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) = C_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) = \langle \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) \tilde{\mu}_v(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (5.6)$$

Se demuestra la siguiente proposición:

- ii. Si  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es homogénea y las microlentes del sensor son iguales, entonces las correlaciones cruzadas de las fluctuaciones de las dos componentes ortogonales de los centroides en cada microlente no dependen de la posición  $\mathbf{r}_n$ :  $\Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) = \Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}$ .

En caso de que los únicos momentos relevantes de  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  sean los de segundo orden, las proposiciones i y ii informan de que el tamaño, la orientación y la forma de las nubes de puntos en las subpupilas van a ser iguales en todas las microlentes.

Para demostrar la proposición ii, se halla la expresión de  $C_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  para  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  homogéneo. Reiterando el proceso seguido para obtener (5.4):

$$C_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = -\frac{1}{2} A^{-2} \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial u} \int d^2\mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r}')}{\partial v'} D_{\tilde{W}}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t)] \quad (5.7)$$

Si se usa (5.6), se completa la demostración:

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) = -\frac{1}{2} A^{-2} \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial u} \int d^2\mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r}')}{\partial v'} D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v} \quad (5.8)$$

Las proposiciones i y ii están relacionadas con la homogeneidad de las variaciones de la función de aberración. Veamos ahora otras dos relacionadas con la isotropía de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ , que se producen para las dos formas más comunes de subpupilas: circulares y cuadradas. Las demostraciones se recogen en el apéndice I.

- iii. Si  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es isótropa, si todas las microlentes del sensor son iguales y si la forma de estas es circular o cuadrada, entonces las varianzas de los desplazamientos de los centroides medidas en las direcciones ortogonales  $u = \{x, y\}$  son iguales. Además, gracias a la proposición i se tiene que  $\langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle = \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle$ .
- iv. Si  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es isótropa y las microlentes del sensor son iguales y de forma circular o cuadrada, entonces las correlaciones cruzadas de las fluctuaciones de las dos componentes ortogonales de los centroides en cada microlente son iguales a cero,  $\Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) = \Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v} = 0$ .

La proposición iii conlleva que si la estadística de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es isótropa, entonces la dispersión de las nubes de centroides a lo largo de las direcciones  $u = \{x, y\}$  de medida ha de ser la misma. Por su parte, la proposición iv indica que si no hay momentos estadísticos de alto orden de  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  relevantes, entonces es de esperar que la nube de centroides de cada microlente presente la misma dispersión en todas las direcciones.

Las proposiciones anteriores han de acogerse con cierta precaución, ya que las medidas experimentales  $m_u(\mathbf{r}_n)$  están afectadas por ruido. En particular, si el ruido es aditivo y no está correlacionado con las aberraciones, a partir de (2.36) se obtiene que las varianzas se ven afectadas por el ruido de la siguiente manera:

$$\langle \tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \eta_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle \quad (5.9)$$

Por su parte, si se supone no correlación entre las componentes ortogonales del ruido en una misma microlente, entonces:

$$\Gamma_{\tilde{m}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) = \Gamma_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n) \quad (5.10)$$

Por tanto, con estas suposiciones el ruido aumenta el valor de las varianzas de las componentes de las medidas, mientras que mantiene constante su covarianza cruzada en la misma microlente. En caso de que las varianzas del ruido sean comparables a la de los desplazamientos teóricos, el cambio dado por (5.9) y (5.10) modifica no sólo el tamaño de las nubes de centroides, sino también su forma (el coeficiente de correlación de Pearson decrece). Si se considera que las varianzas del ruido son iguales para todas las microlentes y para las dos componentes, su efecto será el de dotar al diagrama de centroides de una mayor apariencia de homogeneidad e isotropía.

A la vista de las proposiciones presentadas, una propuesta de modelo de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  homogénea e isotrópica no parece razonable para intentar explicar comportamiento del diagrama 5.2a) del ojo A, aunque no se debe descartar como candidata para el ojo B a la vista del diagrama de la figura 5.2b). De hecho, en la sección 5.5 se ve que la estadística del ojo A está fuertemente dominada por fluctuaciones de desenfoque.

### 5.3 Función de estructura de los gradientes del frente

Al igual que se hizo con la función de aberración, se puede definir una función de estructura para la componente  $u$  de los desplazamientos de los centroides respecto de su valor medio (Nicholls et al. 1995, Silbaugh 1995). Esta magnitud se define como el valor esperado de la diferencia cuadrática de los valores de  $\tilde{\mu}_u$  en cada par de microlentes centradas en  $\mathbf{r}_n$  y  $\mathbf{r}_t$ :

$$D_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \left\langle \left[ \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) - \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_t) \right]^2 \right\rangle \quad (5.11)$$

A esta función también se le conoce como función de estructura de las normales del frente (SSF), debido a la estrecha relación entre  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  y las derivadas locales del frente. En el apartado 3.1.1 se señaló que la definición de la función de estructura  $D_{\tilde{W}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  de la aberración hacía que fuese insensible al pistón. En el caso de la función de estructura de los centroides, las derivadas parciales presentes en el modelo (2.16) del sensor hacen que la SSF sea insensible al prisma.

La SSF es la función que se prefiere en esta tesis para aplicar el procedimiento de falsación de modelos de estadísticas presentado en la sección 5.1. Como también se comentó en el apartado 3.1.1, esta función está íntimamente relacionada con la función de autocorrelación, pero posee una ventaja sobre ella:  $D_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  puede depender de la

diferencia  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t$  entre centros de microlentes incluso aunque  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  no sea homogéneo. Este hecho se hará evidente en el apartado 5.4.2, cuando se presente el modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque.

Para aplicar el procedimiento popperiano a la SSF se necesitan dos pasos:

- Evaluar los valores teóricos de  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  a partir de las magnitudes estadísticas del modelo postulado para la aberración. Para este cálculo se ha de emplear el mismo patrón de microlentes que en el sensor HS experimental.
- Estimar los valores experimentales  $\hat{D}_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  de dicha función a partir de las medidas  $\{m_u^{(k)}(\mathbf{r}_1), \dots, m_u^{(k)}(\mathbf{r}_N)\}_{k=1, \dots, K}$  del sensor. Para ello es necesario descontar el impacto de la estadística del ruido.

El punto a) es más complejo y su resolución depende del modelo concreto postulado para las aberraciones. En el apartado 5.3.1 se presentan expresiones que permiten evaluar de manera más sencilla los valores de  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  y  $C_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  cuando las microlentes del sensor HS son cuadradas y el proceso  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es homogéneo o isótropo. De todas maneras, la presentación de las expresiones definitivas se relega a la sección 5.4, en la que se recogen propuestas concretas de modelos.

Señalemos cómo abordar el punto b). Si se supone ruido aditivo de valor medio cero y que aberraciones y ruido no están correlacionados, los valores experimentales de la SSF se pueden estimar como (Silbaugh et al. 1996):

$$\hat{D}_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[ \tilde{m}_u^{(k)}(\mathbf{r}_n) - \tilde{m}_u^{(k)}(\mathbf{r}_t) \right]^2 - D_{\eta}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) \quad (5.12)$$

La contribución del ruido en la expresión (5.12) se puede simplificar si se cumplen las siguientes suposiciones adicionales:

- Las componentes  $\eta_u(\mathbf{r}_n)$  del ruido en las diferentes subaperturas no están correlacionadas. En ese caso,  $D_{\eta}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \sigma_{\eta_u}^2(\mathbf{r}_n) + \sigma_{\eta_u}^2(\mathbf{r}_t)$ .
- Las varianzas de las componentes  $u, v$  del ruido son iguales en todas las subpupilas y para ambas direcciones. Esta suposición, en combinación con la anterior, implica que  $D_{\eta}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = 2\sigma_{\eta}^2$ .

Para los modelos teóricos de estadística que se tratan en esta tesis,  $\hat{D}_{\mu}^u$  depende sólo del vector de separación  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t$  entre centros de microlentes. En esa situación, el valor de la SSF para cada  $\Delta \mathbf{r}$  puede estimarse promediando entre todos los  $H$  pares

separados por el mismo vector. Como la pupila del sensor tiene un tamaño finito, el valor de  $H$  dependerá de la separación entre microlentes. Por tanto:

$$\begin{aligned}\hat{D}_{\mu}^u(\Delta \mathbf{r}) &= \frac{1}{H(\Delta \mathbf{r})} \sum_{h=1}^{H(\Delta \mathbf{r})} \hat{D}_{\mu}^u(\mathbf{r}_h, \mathbf{r}_h - \Delta \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{H(\Delta \mathbf{r})K} \sum_{h=1}^{H(\Delta \mathbf{r})} \sum_{k=1}^K \left[ \tilde{m}_u^{(k)}(\mathbf{r}_h) - \tilde{m}_u^{(k)}(\mathbf{r}_h - \Delta \mathbf{r}) \right]^2 - 2\sigma_{\eta}^2\end{aligned}\quad (5.13)$$

Además, de entre todas las combinaciones posibles de microlentes nos centraremos en aquellos pares cuyos centros  $\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t$  estén separados en las direcciones  $\{x, y\}$ . En caso de que la dirección de separación coincida con la componente  $u$  de la SSF, a la función se le denomina función de estructura longitudinal (LSSF) y se le denota como  $L_{\mu}^u(\Delta r)$ ; si la dirección de separación y  $u$  son ortogonales, a la SSF se le conoce como función de estructura transversal (TSSF) y se denota como  $T_{\mu}^u(\Delta r)$ . Así:

$$\begin{aligned}L_{\mu}^x(\Delta x) &= D_{\mu}^x(\Delta x, 0) & L_{\mu}^y(\Delta y) &= D_{\mu}^y(0, \Delta y) \\ T_{\mu}^x(\Delta y) &= D_{\mu}^x(0, \Delta y) & T_{\mu}^y(\Delta x) &= D_{\mu}^y(\Delta x, 0)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Otra magnitud de interés es el cociente adimensional entre la TSSF y la LSSF, a la que nos referiremos como “parámetro tau” (Nicholls et al. 1995, Rao et al. 1999):

$$\tau_{\mu}^u(\Delta r) = T_{\mu}^u(\Delta r) / L_{\mu}^u(\Delta r) \quad (5.15)$$

### 5.3.1 Microlentes cuadradas y aberraciones homogéneas o isotrópicas

En este apartado se derivan las ecuaciones que expresan  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  y  $C_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  en términos de la función de estructura de la aberración,  $D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , cuando las microlentes del sensor HS son iguales y cuadradas y  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  es homogéneo o isotrópico.

Como punto de partida, se considera la expresión de  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  para  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  homogéneo. Como se ha visto en la sección 5.2, si todas las microlentes del sensor son iguales, entonces  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  también es homogéneo y, por tanto,  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = D_{\mu}^u(\Delta \mathbf{r})$ . La expresión de la SSF se puede obtener de manera inmediata a partir de (5.4) y (5.5) si se tiene presente la relación entre las funciones de estructura y de autocorrelación:

$$\begin{aligned}D_{\mu}^u(\Delta \mathbf{r}) &= 2 \left[ \langle \tilde{\mu}_u^2 \rangle - C_{\mu}^u(\Delta \mathbf{r}) \right] \\ &= A^{-2} \iint d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial u} \frac{\partial T(\mathbf{r}')}{\partial u'} \left[ D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}) - D_{\tilde{W}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]\end{aligned}\quad (5.16)$$

Silbaugh muestra que esta integral cuádruple de (5.16) puede reducirse a una integral unidimensional para microlentes cuadradas (Silbaugh 1995). La fórmula (2.24)

da el gradiente de la función de transmisión de estas subpupilas. Si son iguales, entonces:

$$\begin{aligned}\nabla T(\mathbf{r}) = & \hat{\mathbf{x}} [\delta(x+d/2) - \delta(x-d/2)] \text{rect}(y/d) \\ & + \hat{\mathbf{y}} [\delta(y+d/2) - \delta(y-d/2)] \text{rect}(x/d)\end{aligned}\quad (5.17)$$

Si se considera el caso  $u = x$  y se evalúan las deltas de Dirac, se obtiene que:

$$\begin{aligned}D_{\mu}^x(\Delta\mathbf{r}) = & d^{-4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy dy' \text{rect}\left(\frac{y}{d}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) \\ & \left\{ 2[D_{\tilde{W}}(\Delta x, y - y' + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(0, y - y')] \right. \\ & - [D_{\tilde{W}}(\Delta x - d, y - y' + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(-d, y - y')] \\ & \left. - [D_{\tilde{W}}(\Delta x + d, y - y' + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(d, y - y')] \right\}\end{aligned}\quad (5.18)$$

Para reducir (5.18) a una integral unidimensional, se aplica el cambio  $u = y - y'$ ,  $v = (1/2)(y + y')$ . Evaluando la integral respecto de  $v$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}D_{\mu}^x(\Delta\mathbf{r}) = & d^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2[D_{\tilde{W}}(\Delta x, u + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(0, u)] \right. \\ & - [D_{\tilde{W}}(\Delta x - d, u + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(-d, u)] \\ & \left. - [D_{\tilde{W}}(\Delta x + d, u + \Delta y) - D_{\tilde{W}}(d, u)] \right\} \text{tri}(u/d) du\end{aligned}\quad (5.19)$$

La función triangular  $\text{tri}(x)$  se define como (Goodman 1996: 13):

$$\text{tri}(x) \equiv \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}\quad (5.20)$$

La expresión (5.19) se simplifica ligeramente para  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  isótropo:

$$\begin{aligned}D_{\mu}^x(\Delta\mathbf{r}) = & d^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2[D_{\tilde{W}}(\|d, u\|) - D_{\tilde{W}}(\|0, u\|)] + 2D_{\tilde{W}}(\|\Delta x, u + \Delta y\|) \right. \\ & \left. - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x - d, u + \Delta y\|) - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x + d, u + \Delta y\|) \right\} \text{tri}(u/d) du\end{aligned}\quad (5.21)$$

Usando el mismo procedimiento, la expresión para  $u = y$  es:

$$\begin{aligned}D_{\mu}^y(\Delta\mathbf{r}) = & d^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2[D_{\tilde{W}}(\|u, d\|) - D_{\tilde{W}}(\|u, 0\|)] + 2D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y\|) \right. \\ & \left. - D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y - d\|) - D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y + d\|) \right\} \text{tri}(u/d) du\end{aligned}\quad (5.22)$$

Nótese que para el caso de microlentes cuadradas e iguales, se verifica que:

$$\tilde{W}(\mathbf{r}) \text{ isótropo} \Rightarrow D_{\mu}^x(\Delta x, \Delta y) = D_{\mu}^y(\Delta y, \Delta x)\quad (5.23)$$

Por su parte, las expresiones que se obtienen para las LSSF y las TSSF son:

$$\begin{aligned}
 L_{\mu}^x(\Delta x) &= L_{\mu}^y(\Delta y) = d^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2 \left[ D_{\tilde{W}}(\|d, u\|) - D_{\tilde{W}}(\|0, u\|) \right] + 2D_{\tilde{W}}(\|\Delta x, u\|) \right. \\
 &\quad \left. - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x - d, u\|) - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x + d, u\|) \right\} \text{tri}(u/d) du \\
 T_{\mu}^x(\Delta y) &= T_{\mu}^y(\Delta x) = d^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2 \left[ D_{\tilde{W}}(\|d, u\|) - D_{\tilde{W}}(\|0, u\|) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[ D_{\tilde{W}}(\|0, u + \Delta y\|) - D_{\tilde{W}}(\|d, u + \Delta y\|) \right] \right\} \text{tri}(u/d) du
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Estas expresiones muestran que cuando la aberración es isótropa y las subpupilas del sensor cuadradas e iguales, entonces las LSSF respecto de  $x$  e  $y$  son iguales. Lo mismo sucede con las TSSF. Una consecuencia inmediata de este hecho es que:

$$\tilde{W}(\mathbf{r}) \text{ isótopo} \Rightarrow \tau_x(\Delta r) = \tau_y(\Delta r) \tag{5.25}$$

Por completitud, señalemos que las funciones de autocorrelación para las mismas condiciones que (5.21) y (5.22) se pueden calcular fácilmente usando la ecuación (I.12):

$$\begin{aligned}
 C_{\mu}^x(\Delta \mathbf{r}) &= -\frac{1}{2d^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2D_{\tilde{W}}(\|\Delta x, u + \Delta y\|) - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x - d, u + \Delta y\|) \right. \\
 &\quad \left. - D_{\tilde{W}}(\|\Delta x + d, u + \Delta y\|) \right\} \text{tri}(u/d) du \\
 C_{\mu}^y(\Delta \mathbf{r}) &= -\frac{1}{2d^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y\|) - D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y - d\|) \right. \\
 &\quad \left. - D_{\tilde{W}}(\|u + \Delta x, \Delta y + d\|) \right\} \text{tri}(u/d) du
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Por su parte, la correlación cruzada de las dos componentes es igual a la integral doble:

$$\begin{aligned}
 C_{\mu}^{x,y}(\Delta \mathbf{r}) &= -\frac{1}{2d^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du dv \text{rect}\left(\frac{u}{d}\right) \text{rect}\left(\frac{v}{d}\right) \\
 &\quad \left\{ D_{\tilde{W}}\left(\left\|u - \Delta x + \frac{d}{2}, v + \Delta y + \frac{d}{2}\right\|\right) - D_{\tilde{W}}\left(\left\|u - \Delta x + \frac{d}{2}, v + \Delta y - \frac{d}{2}\right\|\right) \right. \\
 &\quad \left. - D_{\tilde{W}}\left(\left\|u - \Delta x - \frac{d}{2}, v + \Delta y + \frac{d}{2}\right\|\right) + D_{\tilde{W}}\left(\left\|u - \Delta x - \frac{d}{2}, v + \Delta y - \frac{d}{2}\right\|\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

## 5.4 Modelos estadísticos de las aberraciones

En esta sección se particularizan las expresiones de las magnitudes de la sección 5.3 para dos propuestas de estadística de las aberraciones: un modelo de ley de

potencias y un modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque que tiene en cuenta los movimientos de la pupila ocular durante la toma de medidas.

#### 5.4.1 Modelo de ley de potencias

Las leyes de potencias son modelos homogéneos e isotropos de la aberración que generalizan el modelo de Kolmogorov (apartado 3.1.4). Su función de estructura es:

$$D_{\tilde{W}}(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) = (\lambda/2\pi)^2 \gamma_\beta (\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|/\rho_0)^{\beta-2} \quad (5.28)$$

Aquí  $\beta$  es el exponente de la ley,  $\rho_0$  es un parámetro análogo al de Fried y  $\gamma_\beta$  es un factor que depende de  $\beta$  (Stribling et al. 1995, Boreman y Dainty 1996). Redefinimos el último parámetro como  $\tilde{\gamma}_\beta = \gamma_\beta / k^2$ . Para Kolmogorov,  $\beta = 11/3$ ,  $\rho_0 = p_0$  y  $\gamma_\beta = 6.88$ . Si se fija  $\beta$ , el único parámetro libre de (5.28) es el factor  $\tilde{\gamma}_\beta \rho_0^{-(\beta-2)}$ . Stribling et al. hallan (5.28) suponiendo una dependencia de ley de potencias para la función de estructura del índice de refracción. Concluyen que si no se emplean escalas externas, sólo hay turbulencias con  $3 \leq \beta \leq 4$ . En cambio, Boreman y Dainty generalizan la expresión (3.36) del espectro de la aberración de Kolmogorov. En su caso,  $2 < \beta < 4$ , donde con  $\beta = 2$  sólo hay fluctuaciones de pistón y con  $\beta = 4$  sólo de prisma.

Varios autores encontraron expresiones de la SSF y del parámetro tau para las leyes de potencias (Nicholls et al. 1995, Silbaugh et al. 1996, Rao et al. 1999). Nicholls et al. usaron un modelo de HS diferente y subpupilas circulares, mientras que tanto Silbaugh et al. como Rao et al. emplearon el modelo con el promedio espacial del gradiente y microlentes cuadradas. En particular, Silbaugh et al. demostraron que la SSF se puede expresar como la siguiente integral adimensional:

$$D_{\tilde{\mu}}^x(l_x, l_y) = \frac{\tilde{\gamma}_\beta}{d^2} \left( \frac{d}{\rho_0} \right)^{\beta-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2 \|l_x, u + l_y\|^{\beta-2} - \|l_x + 1, u + l_y\|^{\beta-2} - \|l_x - 1, u + l_y\|^{\beta-2} - 2 (\|0, u\|^{\beta-2} - \|1, u\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du \quad (5.29)$$

Las variables  $l_x, l_y$  dan la separación entre las microlentes normalizada por su lado  $d$ :

$$[l_x, l_y] = [\Delta x/d, \Delta y/d] = [(x_n - x_t)/d, (y_n - y_t)/d] \quad (5.30)$$

Para  $u = y$ :

$$D_{\tilde{\mu}}^y(l_x, l_y) = \frac{\tilde{\gamma}_\beta}{d^2} \left( \frac{d}{\rho_0} \right)^{\beta-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2 \|u + l_x, l_y\|^{\beta-2} - \|u + l_x, l_y + 1\|^{\beta-2} - \|u + l_x, l_y - 1\|^{\beta-2} - 2 (\|u, 0\|^{\beta-2} - \|u, 1\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du \quad (5.31)$$

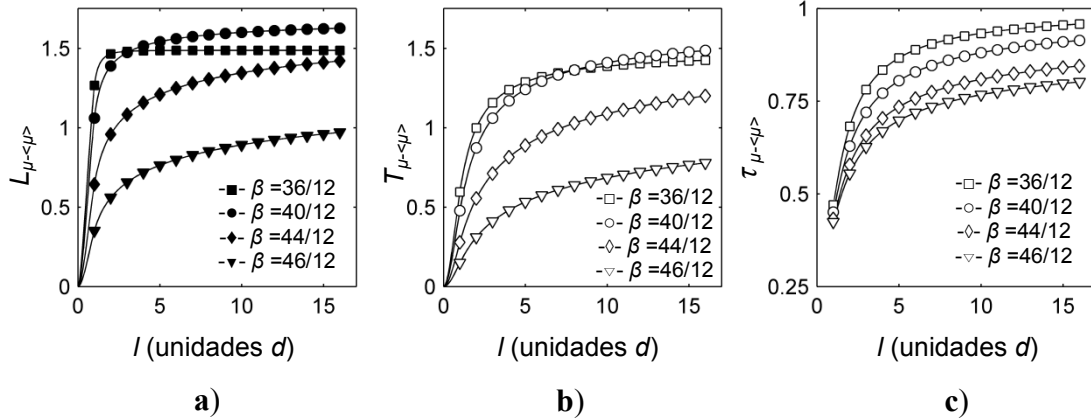


Silbaugh et al. evalúan numéricamente las integrales de (5.29) y (5.31) usando la integración por cuadratura. Por otro lado, las expresiones de las LSSF y las TSSF son:

$$L_{\tilde{\mu}}^x(l) = L_{\tilde{\mu}}^y(l) = \frac{\tilde{\gamma}_{\beta}}{d^2} \frac{d^{\beta-2}}{\rho_0^{\beta-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2\|l, u\|^{\beta-2} - \|l+1, u\|^{\beta-2} - \|l-1, u\|^{\beta-2} - 2(\|0, u\|^{\beta-2} - \|1, u\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du$$

$$T_{\tilde{\mu}}^x(l) = T_{\tilde{\mu}}^y(l) = \frac{\tilde{\gamma}_{\beta}}{d^2} \frac{d^{\beta-2}}{\rho_0^{\beta-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2(\|0, u+l\|^{\beta-2} - \|1, u+l\|^{\beta-2}) - 2(\|0, u\|^{\beta-2} - \|1, u\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du \quad (5.32)$$

Los integrandos son cero para  $\beta = 4$  ya que en la aberración sólo hay fluctuaciones de prisma. Además, si el patrón de microlentes tiene factor de llenado unidad ( $d = L$ ), entonces  $l$  sólo toma valores naturales para la LSSF y la TSSF. En las figuras 5.3a) y 5.3b) se representan los valores teóricos de  $L_{\tilde{\mu}}^u(l)$  y  $T_{\tilde{\mu}}^u(l)$  para modelos con diferentes exponentes  $\beta$ .



**Figura 5.3:** Curvas teóricas de a) la LSSF, b) la TSSF y c) el parámetro tau de  $\tilde{\mu}_u$  para modelos de ley de potencias con distinto exponente  $\beta$ . Las ordenadas de a) y b) están en unidades de  $\tilde{\gamma}_{\beta} d^{-2} (d/\rho_0)^{\beta-2}$ . Las curvas con  $\beta = 44/12$  (rombos) son las del modelo de Kolmogorov.

La expresión que se obtiene para el parámetro tau es (Rao et al. 1999):

$$\tau_{\tilde{\mu}}^x(l) = \tau_{\tilde{\mu}}^y(l) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2(\|0, u+l\|^{\beta-2} - \|1, u+l\|^{\beta-2}) - 2(\|0, u\|^{\beta-2} - \|1, u\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[ 2\|l, u\|^{\beta-2} - \|l+1, u\|^{\beta-2} - \|l-1, u\|^{\beta-2} - 2(\|0, u\|^{\beta-2} - \|1, u\|^{\beta-2}) \right] \text{tri}(u) du} \quad (5.33)$$

El parámetro no depende de  $\rho_0$ , por lo que su valor está determinado para un  $\beta$  dado. En la figura 5.3c) se representa el valor teórico de  $\tau_{\tilde{\mu}}^u(l)$  para diferentes exponentes. En todos los casos representados se cumple que  $\tau_{\tilde{\mu}}^u(l) < 1$ .

### 5.4.2 Modelo de fluctuaciones de desenfoque

En este apartado se derivan las magnitudes estadísticas de los centroides cuando la estadística de las aberraciones está dominada por variaciones de desenfoque y hay presencia de traslaciones de pupila transversales. Este modelo es de interés para describir los datos obtenidos para ojos individuales, en los que las fluctuaciones de acomodación pueden ser muy relevantes. Un claro ejemplo lo proporciona el diagrama de centroides de la figura 5.2a), que muestra una disposición radial que, a priori, podría ser compatible con un modelo de ese tipo. También es útil, quizá sin incluir movimientos de pupila, para su aplicación en el estudio de poblaciones de ojos: incluso con el uso de lentes correctoras, las variaciones en la aberración entre sujetos con visión normal provocadas por el desenfoque y el astigmatismo residuales son superiores a las causadas por los órdenes superiores (Thibos et al. 2002c).

Como se comprobará en seguida, para el modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  no es un proceso homogéneo, por lo que no se pueden utilizar las expresiones deducidas en el apartado 5.3.1. No obstante, la simplicidad de la propuesta permite calcular analíticamente las magnitudes estadísticas deseadas. De nuevo, se considera que se emplea un sensor HS con microlentes cuadradas e iguales.

Sea  $W(\mathbf{r})$  la expresión de la aberración referida a un sistema de referencia fijo en el sensor (WSRF) y sea  $W_e(\mathbf{r}')$  su expresión respecto a un sistema de referencia ligado a la pupila ocular (ERF). Se denota como  $\mathbf{b}$  al vector aleatorio que da en cada realización la posición del ERF en relación con el WSRF, esto es  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$ . Por tanto:

$$W(\mathbf{r}) = W_e(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \quad (5.34)$$

En general,  $\langle \mathbf{b} \rangle \neq 0$ , como se observa en la figura 4.2a).

Una vez recogido el efecto de los movimientos de pupila, formulemos el modelo de la aberración respecto al ERF. Aquí se considera que  $W_e(\mathbf{r}')$  puede ser representado por un término fluctuante de desenfoque. En consecuencia, usando (5.34):

$$W(\mathbf{r}) = \left(2\sqrt{3}/R_p^2\right) a_4 \|\mathbf{r} - \mathbf{b}\|^2 \quad (5.35)$$

En esta expresión,  $R_p$  es el radio de la pupila del sensor y  $a_4$  es una variable aleatoria con valor medio  $\langle a_4 \rangle$ . Se ha prescindido del término de pistón presente en el polinomio de Zernike de desenfoque, ya que el sensor no es sensible a él. La expresión (5.35) indica que la presencia de movimientos transversales de pupila provoca que un término de desenfoque en el ERF se acople a los prismas y al pistón en el WSRF.

Ahora que se dispone del modelo para la función de aberración, calculemos las predicciones de las fluctuaciones  $\tilde{m}_u(\mathbf{r}_n)$  de los centroides. Para ello, se supone ruido aditivo de valor medio cero, el modelo (2.28) de sensor y subpupilas cuadradas e iguales. Si se define la variable aleatoria  $a = a_4(4 \cdot 3^{1/2}/R_p^2)$ , se obtiene que:

$$\tilde{m}_u(\mathbf{r}_n) = \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) + \eta_u(\mathbf{r}_n) = [a - \langle a \rangle] u_n - [ab_u - \langle ab_u \rangle] + \eta_u(\mathbf{r}_n) \quad (5.36)$$

La función de correlación cruzada de los centroides experimentales se halla a partir de (5.36) evaluando la expresión:

$$\begin{aligned} C_{\tilde{m}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \langle \tilde{m}_u(\mathbf{r}_n) \tilde{m}_v(\mathbf{r}_t) \rangle = & \langle \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) \tilde{\mu}_v(\mathbf{r}_t) \rangle + \langle \tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle \\ & + \langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \tilde{\mu}_v(\mathbf{r}_t) \rangle + \langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para ello, se usan varias suposiciones acerca de la independencia o no correlación de las variables aleatorias involucradas. En particular, se supone:

- Independencia de las variaciones de desenfoque y los movimientos de pupila. Como la independencia implica no correlación:

$$\langle [a - \langle a \rangle][b_u - \langle b_u \rangle] \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle ab_u \rangle = \langle a \rangle \langle b_u \rangle \quad (5.38)$$

La suposición de independencia es necesaria para que las potencias de estas variables no estén correlacionadas (Frieden 1991: 44):  $\langle a^p b_u^q \rangle = \langle a^p \rangle \langle b_u^q \rangle$ .

- No correlación de las variaciones de desenfoque y el ruido:

$$\langle a \eta_u(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle a \rangle \langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \rangle = 0 \quad (5.39)$$

- No correlación entre la variable  $ab_u$  y el ruido  $\eta_v(\mathbf{r}_t)$ :

$$\langle ab_u \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = \langle ab_u \rangle \langle \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = 0 \quad (5.40)$$

- El modelo para la estadística del ruido dado por (2.40):

$$\langle \eta_u(\mathbf{r}_n) \eta_v(\mathbf{r}_t) \rangle = \sigma_\eta^2 \delta_{u,v} \delta_{n,t} \quad (5.41)$$

En todas estas expresiones,  $u$  y  $v$  pueden tomar cualquiera de los valores  $\{x, y\}$ . Por lo que respecta a (5.38), para el caso de ojos individuales parece razonable suponer que pequeños movimientos de pupila no van a afectar al estado de acomodación del ojo. En cuanto a (5.39) y (5.40), pueden ser adecuadas para fluctuaciones de desenfoque moderadas, que no alteren en exceso la forma de los *spots*.

Con las suposiciones presentadas:

$$C_{\tilde{m}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = C_{\tilde{\mu}}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) + C_{\eta}^{u,v}(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) \quad (5.42)$$

$$= \sigma_a^2 [u_n - \langle b_u \rangle] [v_t - \langle b_v \rangle] + \langle a^2 \rangle [\langle b_u b_v \rangle - \langle b_u \rangle \langle b_v \rangle] + \sigma_{\eta}^2 \delta_{u,v} \delta_{n,t}$$

La función de autocorrelación se puede obtener tomando  $u = v$  en (5.42):

$$C_{\tilde{m}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \sigma_a^2 [u_n - \langle b_u \rangle] [u_t - \langle b_u \rangle] + \sigma_{b_u}^2 \langle a^2 \rangle + \sigma_{\eta}^2 \delta_{n,t} \quad (5.43)$$

Claramente, la dependencia de la función de autocorrelación con los vectores de posición  $\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t$  de las microlentes es más compleja que la dada por la simple diferencia  $\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_t$ , lo que confirma la no homogeneidad de  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  para este modelo.

Las varianzas de las fluctuaciones de los centroides experimentales se calculan tomando  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_t$  en (5.43). En consecuencia:

$$\langle \tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \eta_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \sigma_a^2 [u_n - \langle b_u \rangle]^2 + \sigma_{b_u}^2 \langle a^2 \rangle + \sigma_{\eta}^2 \quad (5.44)$$

Por tanto, la varianza de las fluctuaciones de los centroides según la dirección  $u$  depende de la coordenada  $u_n$  del centro de las microlentes de acuerdo con una parábola. La parábola tiene un ritmo de crecimiento dado por la varianza  $\sigma_a^2$  del desenfoque, está centrada en la posición  $\langle b_u \rangle$  promedio de la pupila y su mínimo es distinto de cero.

Si se parte de la definición de la SSF y se usan únicamente (5.39) y (5.41):

$$D_{\tilde{m}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = D_{\tilde{\mu}}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) + D_{\eta}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = \sigma_a^2 (u_n - u_t)^2 + 2\sigma_{\eta}^2 \quad (5.45)$$

La definición diferencial de la función de estructura hace que para este modelo los movimientos de pupila no tengan efecto sobre ella, a diferencia de lo que ocurre en (5.43) o en (5.44) con la autocorrelación o la varianza de los centroides. Además, a pesar de que  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  es un proceso no homogéneo, su función de estructura sólo depende de la diferencia de las coordenadas de los centros de las microlentes. Si, como se hizo en el apartado 5.4.1, se desea expresar (5.45) en unidades normalizadas por el lado  $d$  de las microlentes, no hay más que realizar el cambio  $u_n - u_t = l d$ .

A partir de (5.45) las expresiones de las LSSF y las TSSF quedan:

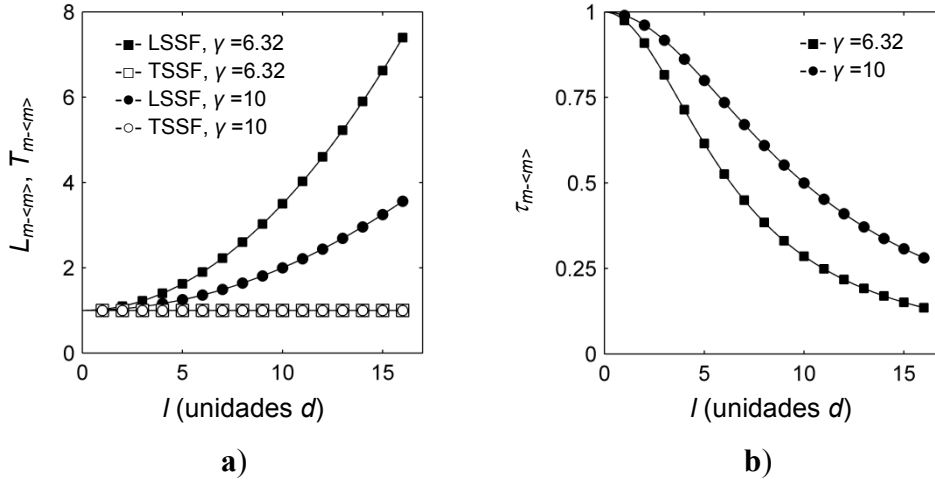
$$L_{\tilde{m}}^x(l) = L_{\tilde{m}}^y(l) = \sigma_a^2 d^2 l^2 + 2\sigma_{\eta}^2 \quad T_{\tilde{m}}^x(l) = T_{\tilde{m}}^y(l) = 2\sigma_{\eta}^2 \quad (5.46)$$

Es decir, las LSSF son proporcionales al cuadrado de la distancia entre las microlentes, mientras que las TSSF son constantes e iguales al doble de la varianza del ruido.

Finalmente, el parámetro tau es igual a una lorentziana:

$$\tau_{\tilde{m}}^x(l) = \tau_{\tilde{m}}^y(l) = \left[ 1 + (\sigma_a^2 d^2 / 2\sigma_{\eta}^2) l^2 \right]^{-1} \quad (5.47)$$

El parámetro tau decae más o menos rápido con  $l$  dependiendo del valor relativo entre las varianzas del desenfoque y del ruido, de las que depende la semianchura a media altura de la lorentziana,  $\gamma = 2^{1/2} \sigma_\eta / (\sigma_a d)$ . La figura 5.4 recoge ejemplos de curvas teóricas de las LSSF, TSSF y del parámetro tau para un par de valores de  $\gamma$ .



**Figura 5.4:** Curvas teóricas de a) la LSSF y la TSSF y b) el parámetro tau de  $\tilde{m}_u$  para el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Las curvas se corresponden con  $\gamma=6.32$  (cuadrados) y  $\gamma=10$  (círculos). En la figura a) las ordenadas se representan en unidades de  $2\sigma_\eta^2$ .

En la expresión (5.35) se representa a la aberración como un término fluctuante desenfoque, ya que se desprecian las fluctuaciones del resto de modos. Cabe preguntarse por la influencia de los valores medios  $\langle a_j \rangle$  de las aberraciones con  $j \neq 4$ , ya que para el caso de ojos individuales no es realista suponer que son iguales a cero. Si se desprecian los movimientos de pupila, trabajar con las variaciones  $\tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n)$  de los centroides hace que las magnitudes estadísticas usadas no se vean afectadas por el resto de términos estáticos de la aberración. Si los movimientos oculares son grandes y no se sigue la posición de la pupila, los valores medios de los coeficientes distintos de cero de la aberración introducen un error en las expresiones de este apartado. Este error depende tanto de las propiedades de los movimientos como de los valores medios de las aberraciones.

#### a) Contribución de los prismas

El modelo formulado en este apartado destaca por su simplicidad. A la hora de usarlo se ha de proceder con precaución, ya que los trabajos del área han encontrado cambios dinámicos y poblacionales en otros coeficientes distintos del desenfoque (cf. las secciones 4.1 y 4.2). En especial, se ha de tener cuidado al interpretar los valores obtenidos para los parámetros de las expresiones teóricas de este apartado tras ajustar

estas a los datos. Las varianzas de los centroides son las magnitudes más problemáticas porque no son inmunes a los prismas, a diferencia de las funciones de estructura. Si se considera un modelo con fluctuaciones de prisma y desenfoque y se siguen los mismos pasos que para el modelo de solo desenfoque, con la suposición adicional de no correlación entre los prismas y el ruido, se llega a que: a) las varianzas  $\langle \tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de los centroides siguen dependiendo de  $u_n$  por medio de una parábola con ritmo de crecimiento  $\sigma_a^2$ ; b) la posición del mínimo de la parábola y su valor se ven modificados. En particular, el cambio  $\delta$  en la posición  $\mathbf{r}_0$  del mínimo es proporcional a la covariancia de cada modo de prisma y del desenfoque dividida por la varianza del desenfoque:

$$\mathbf{r}_0 = \langle \mathbf{b} \rangle + \delta = \left[ \langle b_x \rangle - \frac{R_p}{2\sqrt{3}} \frac{B_{a_2, a_4}}{\sigma_{a_4}^2} \quad \langle b_y \rangle - \frac{R_p}{2\sqrt{3}} \frac{B_{a_1, a_4}}{\sigma_{a_4}^2} \right]^T \quad (5.48)$$

*b) Contribución de los astigmatismos*

Supongamos que al modelo de este apartado se le añaden fluctuaciones de astigmatismo a las de desenfoque. La aberración respecto al WSRF es entonces:

$$W(\mathbf{r}) = a_4 Z_4(\mathbf{r} - \mathbf{b}) + a_3 Z_3(\mathbf{r} - \mathbf{b}) + a_5 Z_5(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \quad (5.49)$$

Si se realizan las mismas suposiciones que para derivar (5.36), se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_x(\vec{r}_n) &= \frac{2\sqrt{6}}{R_p^2} \left\{ \left[ \sqrt{2}(a_4 - \langle a_4 \rangle) + (a_5 - \langle a_5 \rangle) \right] x_n + (a_3 - \langle a_3 \rangle) y_n \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}(a_4 b_x - \langle a_4 b_x \rangle) - (a_3 b_y - \langle a_3 b_y \rangle) - (a_5 b_x - \langle a_5 b_x \rangle) \right\} + \nu_x(\vec{r}_n) \\ \tilde{m}_y(\vec{r}_n) &= \frac{2\sqrt{6}}{R_p^2} \left\{ (a_3 - \langle a_3 \rangle) x_n + \left[ \sqrt{2}(a_4 - \langle a_4 \rangle) - (a_5 - \langle a_5 \rangle) \right] y_n \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2}(a_4 b_y - \langle a_4 b_y \rangle) - (a_3 b_x - \langle a_3 b_x \rangle) + (a_5 b_y - \langle a_5 b_y \rangle) \right\} + \nu_y(\vec{r}_n) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Con estos resultados se comprueba que, aunque las varianzas de los centroides siguen dependiendo de las coordenadas  $x_n$  e  $y_n$  de las microlentes según polinomios de orden 2, sus expresiones se complican. Así, cada  $\langle \tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  ya no depende en exclusiva de la coordenada  $u_n$ . Las expresiones de la LSSF y de la TSSF son más simples. Si se supone no correlación del ruido con los tres modos y se usa el modelo de ruido de (2.40):

$$L_{\tilde{m}}^x(l) = \frac{24}{R_p^4} \left( 2\sigma_{a_4}^2 + \sigma_{a_5}^2 + 2\sqrt{2}B_{a_4, a_5} \right) d^2 l^2 + 2\sigma_{\eta}^2; \quad T_{\tilde{m}}^x(l) = \frac{24}{R_p^4} \sigma_{a_3}^2 d^2 l^2 + 2\sigma_{\eta}^2 \quad (5.51)$$

$$L_m^y(l) = \frac{24}{R_p^4} \left( 2\sigma_{a_4}^2 + \sigma_{a_5}^2 - 2\sqrt{2}B_{a_4, a_5} \right) d^2 l^2 + 2\sigma_\eta^2; \quad T_m^y(l) = \frac{24}{R_p^4} \sigma_{a_3}^2 d^2 l^2 + 2\sigma_\eta^2 \quad (5.52)$$

De nuevo, las LSSF y las TSSF sólo dependen de la separación  $l$  entre microlentes a pesar de que la aberración es no homogénea. Además, las funciones de estructura siguen sin depender de las traslaciones  $\mathbf{b}$  de la pupila ocular. En cambio, ahora las TSSF no permanecen constantes, sino que siguen otra parábola con un ritmo de crecimiento proporcional a  $\sigma^2(a_3)$ . Además,  $T_m^x(l) = T_m^y(l)$ . Por su parte, las LSSF siguen dependiendo parabólicamente de  $l$ , pero ahora su ritmo de crecimiento es diferente para cada componente  $u$  y no depende únicamente de  $\sigma^2(a_4)$ .

La dependencia de la función de estructura  $D_m^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$  con la diferencia de coordenadas  $u_n - u_t$  de las microlentes facilita la evaluación del comportamiento de esta función: tan sólo hay que usar gráficas unidimensionales, como las de la figura 5.4. Esta dependencia no está garantizada en modelos que incluyan modos de orden radial  $n > 2$ .

## 5.5 Aplicación al estudio de ojos individuales

En esta sección se discute e ilustra la aplicación de los métodos de este capítulo al estudio de la estadística espacial de las aberraciones de ojos individuales. En el primer apartado se comentan varias particularidades de esta aplicación a tener en cuenta al procesar y analizar los datos. En el segundo y a modo de ejemplo, los métodos se utilizan para investigar la estadística de las aberraciones de dos ojos.

### 5.5.1 Particularidades de la aplicación

Para estudiar la estadística de un ojo individual, es necesario usar un sensor de frente de ondas que tome una serie temporal de medidas. Cada medida se corresponde con un instante  $t_k$  en el que la cámara del sensor adquiere una imagen de los *spots* de las microlentes. A partir de cada imagen se obtiene un vector  $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}(t_k)$  con las  $2N$  componentes de los desplazamientos de los centroides. Al finalizar la serie de medidas, se dispone de un vector diferente para un conjunto de  $K$  instantes. Estos son los datos que se emplean para aplicar los métodos del capítulo 5. Cada  $\mathbf{m}^{(k)}$  está ligado a una realización  $W^{(k)}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}; t_k)$  de la aberración ocular y a una  $\boldsymbol{\eta}^{(k)} = \boldsymbol{\eta}(t_k)$  del ruido, ambas desconocidas. En relación con las aberraciones oculares, el método de falsación de modelos presentado en la figura 5.1 requiere de la postulación de un modelo de su estadística. Respecto al ruido, se debe descontar su influencia en la estadística de los desplazamientos de los centroides, lo que hace necesario estimar sus momentos

estadísticos en las condiciones existentes durante la medida de ojos individuales. Para ello se usan los desplazamientos de los centroides obtenidos con ojos artificiales estáticos usando tiempos de adquisición y niveles de irradiancia en el plano de la cámara similares a los de los ojos reales, como se menciona en el apartado 2.3.1.

Una de las principales diferencias con el caso atmosférico es que en el caso ocular los valores medios  $\langle W(\mathbf{r}) \rangle$  de las aberraciones varían con la posición  $\mathbf{r}$  en la pupila. Como se menciona en el apartado 3.1.1, este hecho hace inadecuado describir  $W(\mathbf{r})$  con modelos homogéneos. Estos valores medios son especialmente relevantes para los ojos individuales, ya que para conjuntos de ojos con visión normal muchos de los coeficientes de Zernike estimados tienen valores medios próximos a cero en la muestra (cf. la sección 4.1). La solución adoptada consiste en estudiar la estadística de las variaciones  $\tilde{W}(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) - \langle W(\mathbf{r}) \rangle$  de la aberración respecto de su valor medio en cada punto. Dada la linealidad del modelo del HS,  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  está ligada a  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n) = \mu_u(\mathbf{r}_n) - \langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle$ . Los valores medios que se sustraen,  $\langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle$ , se estiman a partir de las  $K$  medidas disponibles para cada componente y microlente:

$$\langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n) \quad (5.53)$$

Otro factor a tener en cuenta es la existencia de movimientos oculares durante la serie temporal. Estamos interesados en conocer la estadística espacial de las aberraciones en diferentes localizaciones de la pupila ocular. Por ello, es conveniente realizar un seguimiento de la posición de dicha pupila en relación con el sensor a fin de establecer correctamente con qué región de la misma se corresponden las medidas tomadas en cada microlente. En principio, en presencia de movimientos de pupila se debe sustituir la notación  $\mu_u(\mathbf{r}_n)$  usada en las magnitudes estadísticas de esta sección, e. g., en  $D_{\mu}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t)$ . Estamos ahora interesados en conocer la estadística en puntos  $\mathbf{r}^*$ ,  $\mathbf{r}''$  fijos respecto al ERF. La presencia de movimientos hace que esos puntos no tengan que estar ligados siempre a las mismas subaperturas  $n$  o  $t$  del sensor. Surge un problema que es necesario abordar: incluso aunque se disponga de un método exacto de seguimiento de la pupila, es inevitable que se produzca cierto error ligado a los movimientos oculares y al número finito de subpupilas. Por ejemplo, las traslaciones transversales provocan que las posiciones en el ERF de las microlentes que muestrean la pupila ocular sean diferentes en las distintas realizaciones. Supongamos que en una realización  $k_1$  la posición  $\mathbf{r}_n$  del centro de una subpupila en el WSRF esté descrita por el vector  $\mathbf{r}^*$  en el ERF, de modo que:  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_n - \mathbf{b}^{(k_1)}$ . En general, para otra realización  $k_2$  ninguna



microlente  $n'$  del sensor muestrea exactamente la misma región de la pupila ocular que  $n$  en  $k_1$ , i. e., no se cumple que  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_n - \mathbf{b}^{(k_2)}$ . Esto resulta un inconveniente, ya que para estimar los valores de funciones como  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}^*) \rangle$  o  $D_\mu^u(\mathbf{r}^*, \mathbf{r}'')$  es conveniente reunir un número elevado de valores de  $\mu_u(\mathbf{r}^*)$  en las localizaciones espaciales  $\mathbf{r}^*, \mathbf{r}''$ .

Se describe ahora cómo se afronta en la tesis el problema descrito en el párrafo anterior. Se considera que las subpupilas del HS utilizado están distribuidas en una red cuadrada. El método consiste en suponer que en todas las realizaciones se obtienen valores de los desplazamientos de los centroides  $\mu_u$  en una serie de localizaciones fijas del ERF,  $\mathbf{r}_1^*, \dots, \mathbf{r}_n^*, \dots, \mathbf{r}_N^*$ . Las localizaciones están distribuidas en el interior de la pupila ocular siguiendo otra red cuadrada con el mismo espaciado  $L$  que la red de microlentes. A cada localización  $\mathbf{r}_n^*$  se le asignan los desplazamientos medidos en la realización  $k$  en aquella microlente con centro  $\mathbf{r}_n$ , tal que:

$$\mathbf{r}_n^* - L/2 \leq \mathbf{r}_n - \mathbf{b}^{(k)} \leq \mathbf{r}_n^* + L/2 \quad (5.54)$$

Los valores de cada  $\mu_u(\mathbf{r}_n^*)$  se pueden obtener a partir de microlentes diferentes en realizaciones distintas, dependiendo de la magnitud de las traslaciones.

El método propuesto atribuye la misma localización espacial  $\mathbf{r}_n^*$  en el ERF a cada punto  $\mathbf{r}_n - \mathbf{b}^{(k)}$  perteneciente a la vecindad  $[\mathbf{r}_n^* - L/2, \mathbf{r}_n^* + L/2]$ . Equivalentemente, se puede suponer que se comente un error  $\Delta \mathbf{b}^{(k)}$  en la determinación de cada posición de la pupila ocular tal que  $\mathbf{r}_n^* = \mathbf{r}_n - \mathbf{b}^{(k)} - \Delta \mathbf{b}^{(k)}$ . Por tanto,  $\Delta \mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_n^* - \mathbf{b}^{(k)}$ . De acuerdo con (5.54), este error está acotado por la semiseparación entre microlentes, por lo que el procedimiento sólo es útil cuando los movimientos son mayores que dicho parámetro. Con buenos fijadores y subpupilas grandes, podría ser conveniente usar un número de localizaciones en pupila mayor que el de microlentes, por ejemplo, con un espaciado menor. Como las localizaciones  $\mathbf{r}_1^*, \dots, \mathbf{r}_N^*$  son en esencia una reproducción de la red de subpupilas del sensor, por simplicidad se omite la diferencia de notación entre  $\mathbf{r}_n^*$  y  $\mathbf{r}_n$ .

Por lo que se refiere a las frecuencias de adquisición de las imágenes del HS, los valores usados en los dispositivos de esta tesis fueron de 20 Hz (para los dos ojos analizados en esta sección) y de 24 Hz (para los datos de los capítulos 6 y 7). Con estos valores se necesita que las series duren al menos 5 s para reunir un número de  $K=100$  medidas. Esto a su vez obliga a permitir parpadear libremente a las personas que participan en las medidas, a fin de que las medidas se realicen en las condiciones naturales de visión. Al igual que en muchos estudios de la dinámica temporal de las aberraciones, se considera que los datos tomados durante los parpadeos son espurios,

por lo que se opta por su eliminación. El método usado para detectarlos es la inspección visual de las imágenes obtenidas por el sensor. La eliminación de los datos asociados a parpadeos no tiene mayores consecuencias para los métodos propuestos, que no requieren utilizar realizaciones separadas por intervalos uniformes de tiempo.

Los datos con los que se trabaja en esta tesis consisten en series temporales de ojos de personas con visión normal, bien jóvenes o de mediana edad. Se dispone de una única serie por ojo de un mínimo de 5 s de duración, aunque en ocasiones la serie es sensiblemente más larga. El procedimiento seguido consiste en estudiar los resultados de las diferentes series individuales. Dadas las características comentadas en la sección 4.2 acerca de la dinámica temporal de las aberraciones, como su no estacionaridad o la existencia de derivas en aberraciones como el desenfoque, es de esperar que se produzca cierta variabilidad entre los resultados obtenidos con dos series diferentes de medidas tomadas con el mismo ojo y las mismas condiciones de observación. Por tanto, las conclusiones obtenidas se han de considerar propias de la serie temporal medida, no del ojo analizado. La duración de las series temporales también puede afectar a la estadística observada. Por ejemplo, usar series de larga duración puede dar pie a que se promedien fenómenos temporales más localizados. Si se dispone de una serie de un ojo individual de cierta duración, se puede hacer un estudio de estos factores dividiendo la serie en fragmentos y comparando los resultados obtenidos para cada uno de ellos.

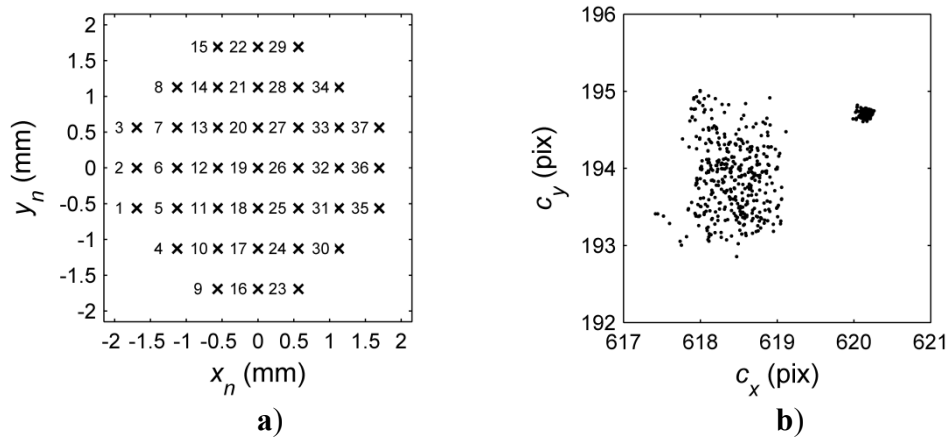
### 5.5.2 Ejemplo: estudio de la estadística de dos ojos

En este apartado se analiza la estadística espacial de las aberraciones de dos ojos jóvenes. El énfasis se pone más en la aplicación de los métodos presentados en este capítulo que en la descripción de la recogida y el procesado de los datos. En el capítulo 6 se abordan estos otros aspectos con más detalle para una muestra de ojos más grande.

Las medidas las tomó Justo Arines en el laboratorio del grupo de Salvador Bará con anterioridad a la incorporación del autor de la tesis al mismo. Para la toma de datos se usó un sensor de frente de ondas diferente al mencionado en el capítulo 6 (Arines et al. 2010). Brevemente, la matriz del HS estaba formada por microlentes cuadradas distribuidas en una red cuadrada con  $d=L=0.564$  mm y focal tras calibración de  $z=51.8$  mm. Tras aplicar un *binning* x2, la resolución de la cámara era de  $21.76$   $\mu\text{m}/\text{pix}$ . Las imágenes se adquirieron con una frecuencia de 20 Hz. La fuente utilizada para las medidas fue un puntero láser de baja coherencia a  $\lambda=0.633$   $\mu\text{m}$  y con 50 nm de anchura espectral. No se emplearon fármacos midriáticos. A partir de los coeficientes de

Zernike estimados para las medidas de la serie con  $R_p = 2.15$  mm y  $M = 35$  modos, se tiene que  $\Delta_2^{1/2} = \left[ \sum_{j=3}^M \langle \hat{a}_j^2 \rangle \right]^{1/2} = 0.417$   $\mu\text{m}$  para el ojo A y  $0.330$   $\mu\text{m}$  para el B.

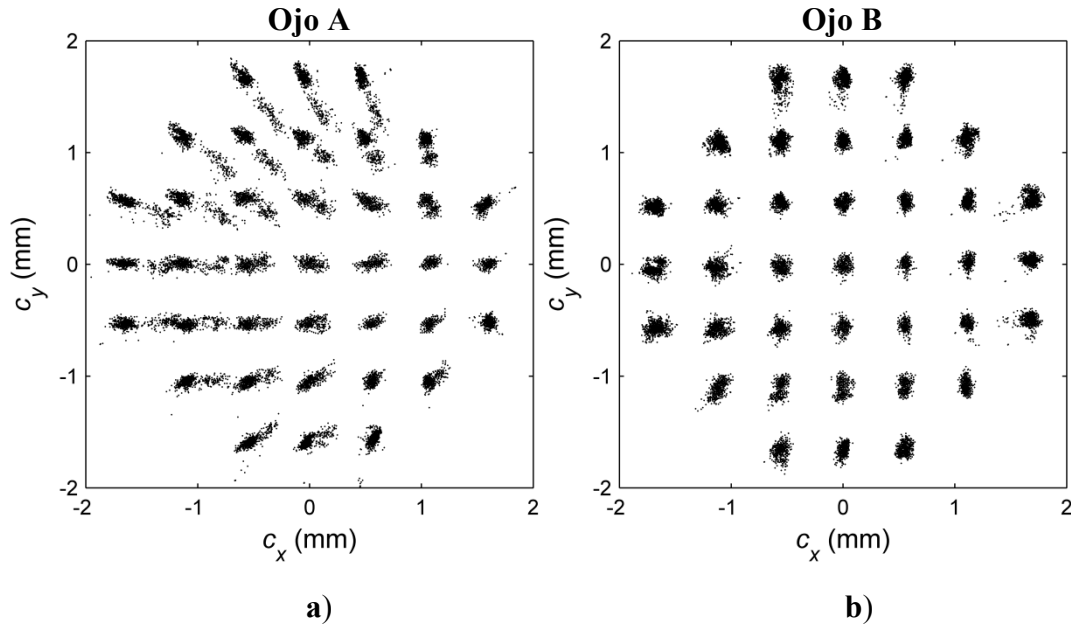
En la figura 5.2 se representan los diagramas de centroides asociados a las dos series temporales medidas. Las series completas constaban de  $K = 1185$  medidas, con casi 1 minuto de duración. Para la estimación de los desplazamientos de los centroides se usó una técnica de umbralización. Este es el mismo tipo de procedimiento que el usado con los ojos del capítulo 6. No obstante, para hallar las posiciones de los centroides mostradas en la figura 5.2 se usaron algoritmos y programas diferentes de los del capítulo 6. Por ejemplo, no se realizó un seguimiento de la pupila ocular. Las imágenes del HS fueron inspeccionadas para descartar las medidas asociadas con parpadeos y grandes desplazamientos de la pupila. No obstante, en los datos resultantes existen algunos problemas, como revelan los diagramas de centroides.



**Figura 5.5:** a) criterio de numeración con el índice  $n$  de las microlentes que muestrean la pupila considerada de acuerdo con la posición  $\mathbf{r}_n$  de cada centro (indicada con aspás). El origen de coordenadas se sitúa en la microlente central. b) Nube de centroides de la microlente  $n = 37$  del diagrama de centroides de la figura 5.2b) (ojo B con  $Q = 1$ ).

Como se ha mencionado, los diagramas de centroides son útiles para la detección de valores atípicos. Al observar las gráficas de la figura 5.2, y en especial el diagrama 5.2b), se pueden detectar ciertos comportamientos difícilmente atribuibles a las fluctuaciones de la aberración de un ojo real. Numeremos las microlentes del patrón con el índice  $n$  según el siguiente criterio, recogido en la figura 5.5a): las microlentes se recorren por columnas, formadas por todas aquellas subpupilas cuyo centro tiene (aproximadamente) la misma coordenada  $x_n$ . Cada columna se recorre en sentido de  $y_n$  ascendente; se empieza por la columna de menor  $x_n$  y se acaba por la de mayor  $x_n$ . Con esta numeración, se puede observar que, por ejemplo, en las subpupilas  $n = 35, 37$  de la

figura 5.2b) existen agrupaciones de puntos notablemente alejadas de la nube de puntos principal. En la figura 5.5b) se grafica de nuevo la nube de la microlente  $n=37$ , esta vez sin factor de aumento ( $Q=1$ ). Los valores atípicos están densamente agrupados a la derecha de la nube, siendo su dispersión del mismo orden que la del ruido (como veremos, para este sensor  $\sigma_\eta \sim 0.06$  píxeles). Estos *outliers* provocan sobreestimaciones de las varianzas  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de las microlentes  $n=35, 37$ . En el diagrama de centroides del ojo A también se observan algunos valores atípicos, que son especialmente visibles en la subpupila  $n=29$  de la figura 5.2a). Al inspeccionar las imágenes del HS, se observa la existencia de reflexiones del sistema de imagen que están presentes en algunas medidas. El montaje utilizado estaba dotado de cierta complejidad ya que estaba destinado a validar la estimación de los movimientos transversales de la pupila a partir de las imágenes de un HS (Arines et al. 2010).

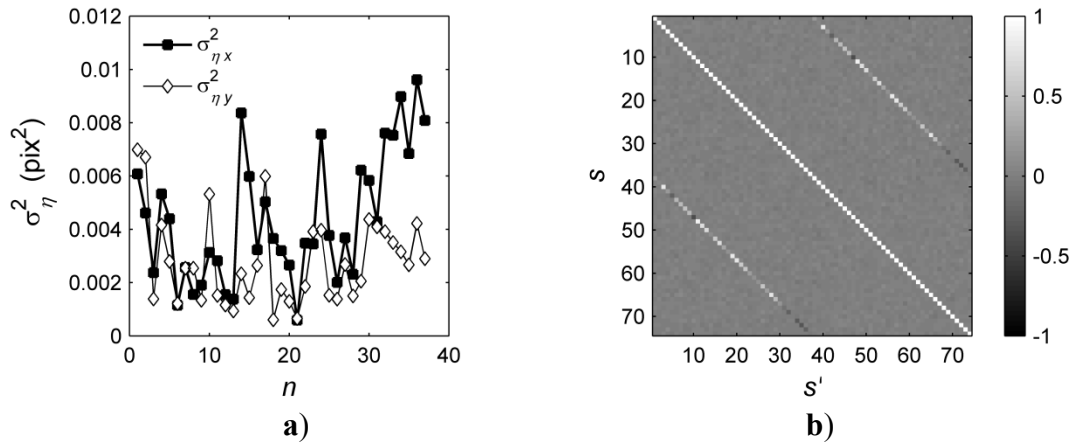


**Figura 5.6:** Diagramas de centroides reprocesados para evitar los valores atípicos. Los desplazamientos de los centroides respecto de su valor medio en cada microlente se aumentan un factor  $Q=5$ . No se realizó seguimiento de la pupila ocular. Para el ojo A,  $K=537$ , mientras que para el B  $K=666$ .

Las series temporales de los dos ojos fueron reprocesadas. Se inspeccionaron de nuevo las imágenes del HS para identificar y descartar las realizaciones con parpadeos o reflexiones. Los desplazamientos de los centroides fueron reestimados, en esta ocasión usando los mismos algoritmos y programas que se describen en el capítulo 6, con una modificación: no se realizó un seguimiento de la pupila ocular. En su lugar, se empleó siempre el mismo conjunto de microlentes, i. e., se usó una pupila fija en el WSRF. No

obstante, se les aplicó a los picos de las distribuciones de irradiancia de las microlentes un umbral proporcional al promedio de los picos de todas las subpupilas del patrón, como se describe en el apartado 6.2.2, a fin de descartar aquellas realizaciones en las que alguna de las subpupilas tiene un bajo nivel de irradiancia. Dado que la pupila ocular es de tamaño algo mayor que la pupila considerada en el sensor, este procedimiento no impide descentramientos moderados de la pupila, pero sí que evita considerar aquellas medidas en las que el descentramiento es elevado y afecta considerablemente a la irradiancia de alguna microlente.

Los nuevos diagramas de centroides se muestran en la figura 5.6. El origen de coordenadas es la posición  $\mathbf{r}_n$  de la microlente central de la pupila usada. Los valores atípicos ya no están presentes en las gráficas; existen algunos puntos aislados alejados de las nubes principales, pero ya no son grandes agrupaciones. Para el ojo B las nubes de las subpupilas de la fila superior de microlentes ( $n=15, 22$  y  $29$ ) tienen ahora anchos según la dirección y similares a los de sus microlentes vecinas, mientras que en la figura 5.2b) su dispersión era menor. El precio a pagar es un valor de  $K$  menor para ambas gráficas ( $K=537$  para el ojo A y  $K=666$  para el B). En el resto de los aspectos, los diagramas de la figura 5.6 son muy similares a los de la figura 5.2.



**Figura 5.7:** a) Varianzas de las componentes  $\eta_u(\mathbf{r}_n)$  de los desplazamientos de los centroides ligados al ruido de cada microlente  $n$ . b) Matriz  $\mathbf{R}_{\eta}$  de coeficientes de correlación de Pearson del vector de ruido.

Tratemos ahora la estadística del ruido. Para estudiarla, se tomaron medidas con un ojo artificial usando niveles de irradiancia en la cámara similares a los de los ojos experimentales, el mismo tiempo de adquisición  $T=50$  ms y la misma ganancia. El ojo artificial estaba formado por una lente de 50 mm de focal y una pupila artificial de 4

mm. Se creó un objeto luminoso de  $60\text{ }\mu\text{m}$  de extensión en el foco de la lente usando un led y un objetivo de microscopio. La serie temporal consta de  $K=1797$  medidas.

En la figura 5.7a) se grafican las varianzas  $\langle \eta_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \eta_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de los desplazamientos de los centroides obtenidos para la serie de ruido en cada microlente  $n$ , de acuerdo con la numeración de la figura 5.5a). Se observa cierta variabilidad, tanto para la varianza de cada componente entre las diferentes localizaciones espaciales como entre las dos componentes. La hipótesis de varianza constante igual a  $\sigma_\eta^2$  ha de entenderse, por tanto, como una aproximación. Con los datos de la figura, los promedios entre microlentes de las varianzas de cada componente son  $\langle \eta_x^2 \rangle = (4.4 \pm 0.4) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$  y  $\langle \eta_y^2 \rangle = (2.8 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$  (las incertidumbres son los errores estándar de los valores medios en la muestra de microlentes). Se puede estimar el valor de  $\sigma_\eta^2$  del modelo (2.40) de varianza constante usando el promedio de las varianzas de las dos componentes ortogonales:  $\sigma_\eta^2 = (3.6 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$ , que se corresponde con  $\sigma_\eta = 0.060 \pm 0.003 \text{ pix}$ . En la figura 5.7b) se grafica la matriz  $\mathbf{R}_\eta$  de coeficientes de correlación de Pearson de las  $2N$  componentes del vector de ruido. La expresión (3.45) da la microlente  $n$  y la componente  $u$  asociadas a cada valor del índice  $s$ . Se observa que la suposición de no correlación entre las componentes del ruido asociadas a microlentes distintas se corresponde con el comportamiento experimental. No sucede lo mismo en este sensor para las correlaciones cruzadas entre las dos componentes ortogonales de cada microlente, que originan correlaciones relevantes (cf. la diagonal secundaria de la figura). Este hecho afecta a la validez de (5.10) y hace más complejo el efecto del ruido sobre la forma de las nubes de dispersión del diagrama de centroides.

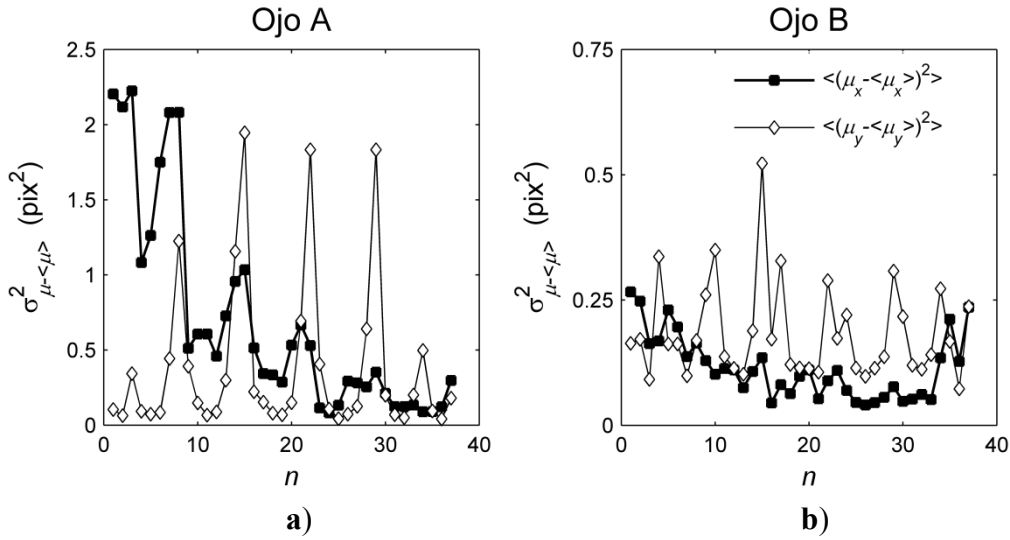
En la figura 5.8 se representan las varianzas de las componentes de los desplazamientos de los centroides para ambos ojos. Se representan las magnitudes  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \tilde{m}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle - \sigma_\eta^2$  resultantes de descontar a los valores experimentales la varianza del ruido, aunque las varianzas experimentales son uno o dos órdenes de magnitud mayores. En el ojo A hay variaciones muy importantes de las varianzas de los centroides con la posición, comportamiento reñido con la homogeneidad de  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  y, por extensión, con la homogeneidad de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ . Los cambios en las varianzas de los centroides del ojo B son mucho más moderados.

El diagrama de centroides del ojo A, mostrado en la figura 5.6a), sugiere que el modelo del apartado 5.4.2 es un buen candidato para describir la estadística de dicho ojo. Recordemos que el modelo de fluctuaciones de desenfoque predice que la varianza

$\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de los desplazamientos de los centroides depende de la coordenada  $u_n$  del centro de cada microlente según la parábola dada por (5.44). Se desea ajustar por mínimos cuadrados las expresiones teóricas del modelo a los datos. Para ello se usa la siguiente ecuación:

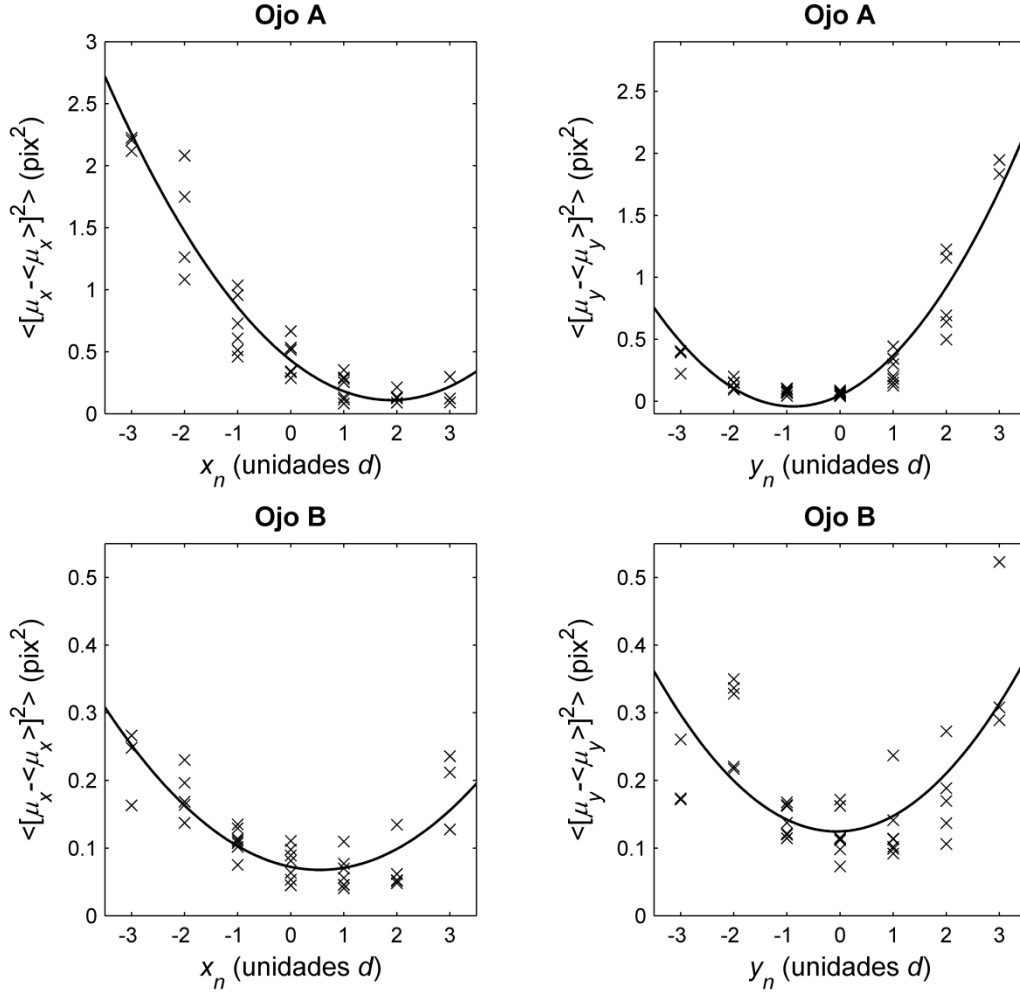
$$\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle = w_1 u_n^2 - 2w_2 u_n + w_3 \quad (5.55)$$

Para el modelo de fluctuaciones de desenfoque:  $w_1 = \sigma_a^2$ ,  $w_2 = \sigma_a^2 \langle b_u \rangle$  y  $w_3 = \sigma_a^2 \langle b_u \rangle^2 + \sigma_{bu}^2 \langle a^2 \rangle$ .



**Figura 5.8:** Varianzas  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de las componentes de los desplazamientos de los centroides para a) el ojo A y b) el ojo B en función del índice  $n$  de las microlentes.

Para realizar el ajuste de la ecuación (5.55), para cada componente  $u$  se construye el sistema  $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{w}$ , donde  $\mathbf{w}$  es el vector columna con los tres parámetros,  $\mathbf{y}$  es el vector de datos con los valores de  $\langle \tilde{\mu}_u^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  para las  $N$  microlentes y  $\mathbf{W}$  es la matriz  $N \times 3$  construida con (5.55). Si se verifican las condiciones de Gauss-Markov, las covarianzas de los coeficientes  $\hat{\mathbf{w}}$  se hallan propagando la varianza  $\sigma^2$  del error del modelo de regresión según  $\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{w}}} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \sigma^2$ . A su vez,  $\sigma^2$  se estima con  $\sigma^2 = 1/(N-3) \|\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{w}}\|^2$  (Sen y Srivastava 1990: 35-37). A partir de los coeficientes de  $\hat{\mathbf{w}}$  se obtienen fácilmente los valores de los parámetros de interés del modelo de fluctuaciones de desenfoque y sus incertidumbres:  $\sigma_a^2$  y  $\langle b_u \rangle$ , así como del producto  $\sigma_{bu}^2 \langle a^2 \rangle$ . En la figura 5.9 se comparan las parábolas resultantes del ajuste de (5.55) con las varianzas experimentales de las componentes  $x$  e  $y$  de los centroides para los ojos A y B. Los resultados del ajuste se recogen en la tabla 5.1. Destaca el alto valor obtenido para la desviación típica del desenfoque del ojo A.



**Figura 5.9:** Varianzas (aspas) de las componentes  $x$  e  $y$  de los centroides para los ojos A y B frente a las coordenadas  $x_n$  o  $y_n$  de las microlentes que muestrean la pupila considerada. Las curvas continuas son las parábolas obtenidas al ajustar la expresión (5.55), asociada al modelo de fluctuaciones de desenfoque.

Los dos ajustes realizados en la figura 5.9 para las varianzas de los desplazamientos de los centroides de cada ojo se pueden reducir a uno solo si se considera la suma de las expresiones teóricas dadas por (5.44) para  $u = x$  e  $y$ :

$$\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle \equiv \langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \sigma_a^2 \|\mathbf{r}_n - \langle \mathbf{b} \rangle\|^2 + (\sigma_{b_x}^2 + \sigma_{b_y}^2) \langle a^2 \rangle \quad (5.56)$$

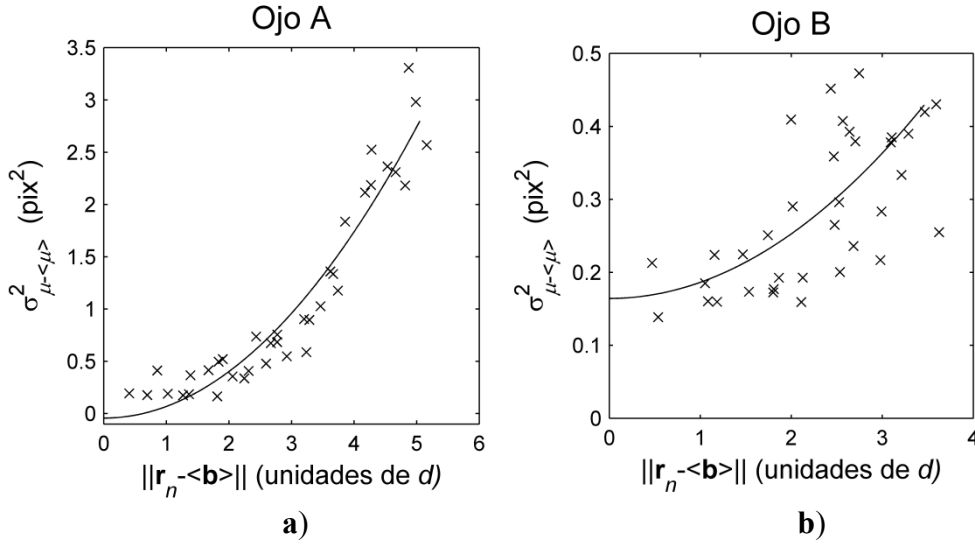
Desarrollando la norma al cuadrado, se llega a la siguiente ecuación, que se puede ajustar por mínimos cuadrados a las varianzas experimentales:

$$\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle = p_1 \|\mathbf{r}_n\|^2 - 2p_2 x_n - 2p_3 y_n + p_4 \quad (5.57)$$

Para el modelo de fluctuaciones de desenfoque,  $p_1 = \sigma_a^2$ ,  $p_2 = \sigma_a^2 \langle b_x \rangle$ ,  $p_3 = \sigma_a^2 \langle b_y \rangle$  y  $p_4 = \sigma_a^2 \|\langle \mathbf{b} \rangle\|^2 + (\sigma_{b_x}^2 + \sigma_{b_y}^2) \langle a^2 \rangle$ . Por tanto, a partir del vector  $\hat{\mathbf{p}}$  resultante del ajuste se obtienen fácilmente los valores e incertidumbres de los parámetros de interés:  $\sigma_a^2$ ,  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$ , así como del producto  $(\sigma_{b_x}^2 + \sigma_{b_y}^2) \langle a^2 \rangle$ . En la figura 5.10 se comparan las



curvas resultantes del ajuste de (5.57) con los datos experimentales. Las varianzas  $\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  se grafican frente a la distancia entre el centro de cada microlente y el valor estimado para el descentramiento ocular promedio,  $\|\mathbf{r}_n - \langle \mathbf{b} \rangle\|$ , a fin de obtener funciones unidimensionales. Las abscisas están en unidades de lado de microlente  $d$ . Los resultados de los ajustes se recogen en la tabla 5.1.



**Figura 5.10:** Parábolas resultantes del ajuste por mínimos cuadrados de la ecuación (5.57), correspondiente al modelo de fluctuaciones de desenfoque, a las sumas de las componentes ortogonales de las varianzas experimentales de los centroides de los ojos a) A y b) B, representadas por aspas.

Revisemos los resultados recogidos en la tabla 5.1. Las expresiones teóricas predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque se corresponden muy bien con las varianzas experimentales de los centroides del ojo A ( $R^2 = 0.90$  en el peor caso, el ajuste de la componente  $u = x$ ), mientras que la calidad de los ajustes para el ojo B es menor ( $R^2 = 0.69$  en el mejor caso,  $u = x$ ). En relación con el valor de los parámetros del ajuste, destaca el elevado valor de las fluctuaciones del desenfoque del ojo A,  $\sigma_a = 0.25$  D. Para el ojo B, el modelo predice un valor sensiblemente menor, en torno a 0.10 D. Si se tienen presente las incertidumbres, el valor estimado para la desviación típica  $\sigma_a$  de cada ojo usando el ajuste de la ecuación (5.57) de la suma de varianzas se corresponde bien con los resultados obtenidos con los ajustes de las ecuaciones (5.55) de las varianzas de cada componente.

Ocupémonos de las estimaciones de los descentramientos oculares promedio,  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$ , mostrados en la tabla. Pueden estar originados por descentramientos de la pupila ocular respecto al sensor o por factores fisiológicos (un descentramiento del cristalino respecto del centro de la pupila). Si se usa el modelo de fluctuaciones de desenfoque,

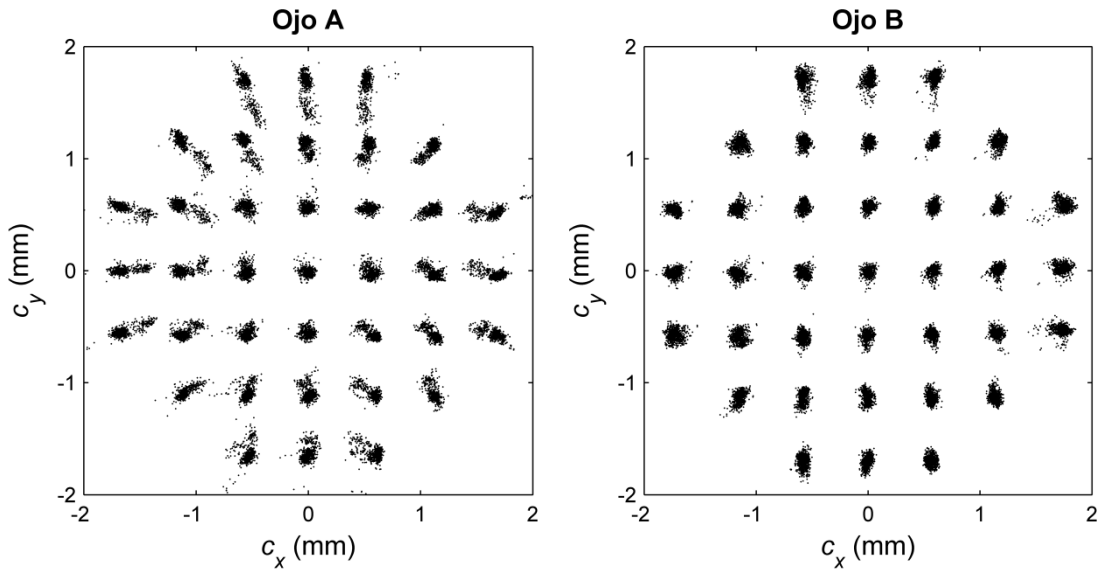
los descentramientos están dados por las posiciones de los mínimos de las parábolas de la expresión (5.55) y del paraboloides de la ecuación (5.57). En la tabla se observa que para el ojo A este modelo predice un notable descentramiento ocular, en especial para  $\langle b_x \rangle$ . En cambio, para el ojo B el descentramiento es muy pequeño, inferior al espaciado entre microlentes ( $L = 0.564$  mm). Los valores predichos para cada componente del descentramiento por los diferentes ajustes coinciden dentro de los márgenes de error. La observación de los diagramas de centroides de la figura 5.6 confirma cualitativamente que los mínimos de las expresiones se han hallado correctamente. No obstante, en los ojos reales el desenfoque no es la única aberración que fluctúa. Se ha visto en el subapartado 5.4.2a) que la presencia de fluctuaciones de prisma significativas altera las expresiones teóricas de la varianza de los centroides obtenidas con el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Aunque las parábolas (o el paraboloides) mantienen su ritmo de crecimiento, las posiciones de sus mínimos se ven modificadas al valor  $\mathbf{r}_0 = \langle \mathbf{b} \rangle + \delta$  dado por (5.48). Se puede calcular el valor de  $\delta$  usando los coeficientes de Zernike estimados para las medidas de la serie temporal. Como no se está siguiendo a la pupila ocular, los movimientos de la misma introducen cierto error en los coeficientes. Con  $M = 35$  modos, para el ojo A se obtiene que  $\delta_x = 1.35$  mm y que  $\delta_y = -0.42$  mm, mientras que para el ojo B  $\delta_x = 0.47$  mm y  $\delta_y = 0.08$  mm. Estos resultados reducen sensiblemente la magnitud de los valores estimados para  $\langle \mathbf{b} \rangle$ , dados por  $\mathbf{r}_0 - \delta$ , que pasan a ser inferiores a  $L$  para ambos ojos.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$
A	$x$	$0.23 \pm 0.02$	$1.1 \pm 0.2$	—	0.90
	$y$	$0.26 \pm 0.01$	—	$-0.50 \pm 0.08$	0.91
	“Suma”	$0.25 \pm 0.02$	$0.9 \pm 0.2$	$-0.7 \pm 0.2$	0.92
B	$x$	$0.091 \pm 0.006$	$0.3 \pm 0.1$	—	0.69
	$y$	$0.11 \pm 0.01$	—	$0.0 \pm 0.1$	0.43
	“Suma”	$0.11 \pm 0.01$	$0.3 \pm 0.2$	$0.0 \pm 0.1$	0.46

**Tabla 5.1:** Resultados de los ajustes de las predicciones teóricas del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las varianzas de los ojos A y B.

Tratemos las estimaciones de los productos  $\sigma_{bu}^2 \langle a^2 \rangle$  y  $(\sigma_{bx}^2 + \sigma_{by}^2) \langle a^2 \rangle$  obtenidas con el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Estos productos son iguales a los valores de las ordenadas en los mínimos de las curvas ajustadas en las figuras 5.9 y 5.10,

respectivamente. Para el ojo A, algunas de estas ordenadas son ligeramente negativas. En su lugar, en esas gráficas se usan los valores de los datos experimentales cerca de los mínimos de las curvas del modelo. Se observa que para ambos ojos  $\sigma_{bx}^2 \langle a^2 \rangle \cong \sigma_{by}^2 \langle a^2 \rangle \cong 0.1 \text{ pix}^2$  y  $(\sigma_{bx}^2 + \sigma_{by}^2) \langle a^2 \rangle \cong 0.2 \text{ pix}^2$ . Por lo que respecta a  $\langle a^2 \rangle$ , sus valores se calculan usando los coeficientes de Zernike estimados a partir de los centroides de cada serie. Se obtiene que  $\langle a^2 \rangle^{1/2} = 0.53 \text{ D}$  para el ojo A y  $0.33 \text{ D}$  para el ojo B, lo que implica que  $\sigma_{bu} \cong 0.18 \text{ mm}$  para el A y  $0.23 \text{ mm}$  para el B. Estos valores son del orden de  $L/2$  ( $0.282 \text{ mm}$ ), por lo que parecen razonables. No obstante, han de tomarse con cautela debido a la existencia de fluctuaciones en aberraciones distintas del desenfoque.



**Figura 5.11:** Diagramas de centroides de los ojos A y B tras descontar los términos asociados a los prismas de cada realización. En las gráficas se usa un factor  $Q=5$ .

Existe un procedimiento que permite reducir el impacto de las fluctuaciones de los prismas en los diagramas de centroides y en las curvas de las varianzas. Ese método no requiere de ningún ajuste ni del uso de polinomios de Zernike. Consiste en que a los desplazamientos  $\mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  de cada medida temporal  $k$  se les descuenta el promedio de los mismos en todas las subpupilas,  $N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$ . Esta última magnitud es una estimación del gradiente promedio del frente de ondas en toda la pupila para la realización  $k$ . Aunque no es la misma magnitud que los prismas asociados al desarrollo modal de la aberración, su sustracción tiene consecuencias interesantes en los diagramas de centroides y en las gráficas de las varianzas, mientras que las funciones de estructura no se ven alteradas. La figura 5.11 muestra los diagramas de centroides de los ojos A y B obtenidos tras sustraer a  $\mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  los promedios  $N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  y restar el valor esperado del proceso resultante, a fin de obtener un nuevo proceso  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  con valor

medio cero. El diagrama del ojo B apenas se ve modificado. En cambio, aunque el diagrama del ojo A sigue sugiriendo el predominio de las fluctuaciones de desenfoque, ahora las nubes de puntos están orientadas hacia la subpupila central considerada.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$
A	$x$	$0.20 \pm 0.01$	$0.18 \pm 0.07$	—	0.76
	$y$	$0.22 \pm 0.01$	—	$-0.29 \pm 0.07$	0.84
	“Suma”	$0.22 \pm 0.01$	$0.18 \pm 0.08$	$-0.30 \pm 0.09$	0.77
B	$x$	$0.087 \pm 0.005$	$-0.02 \pm 0.06$	—	0.67
	$y$	$0.097 \pm 0.008$	—	$-0.02 \pm 0.09$	0.50
	“Suma”	$0.10 \pm 0.01$	$0.1 \pm 0.1$	$-0.1 \pm 0.1$	0.47

**Tabla 5.2:** Resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las varianzas de los centroides de los ojos A y B con los prismas descontados.

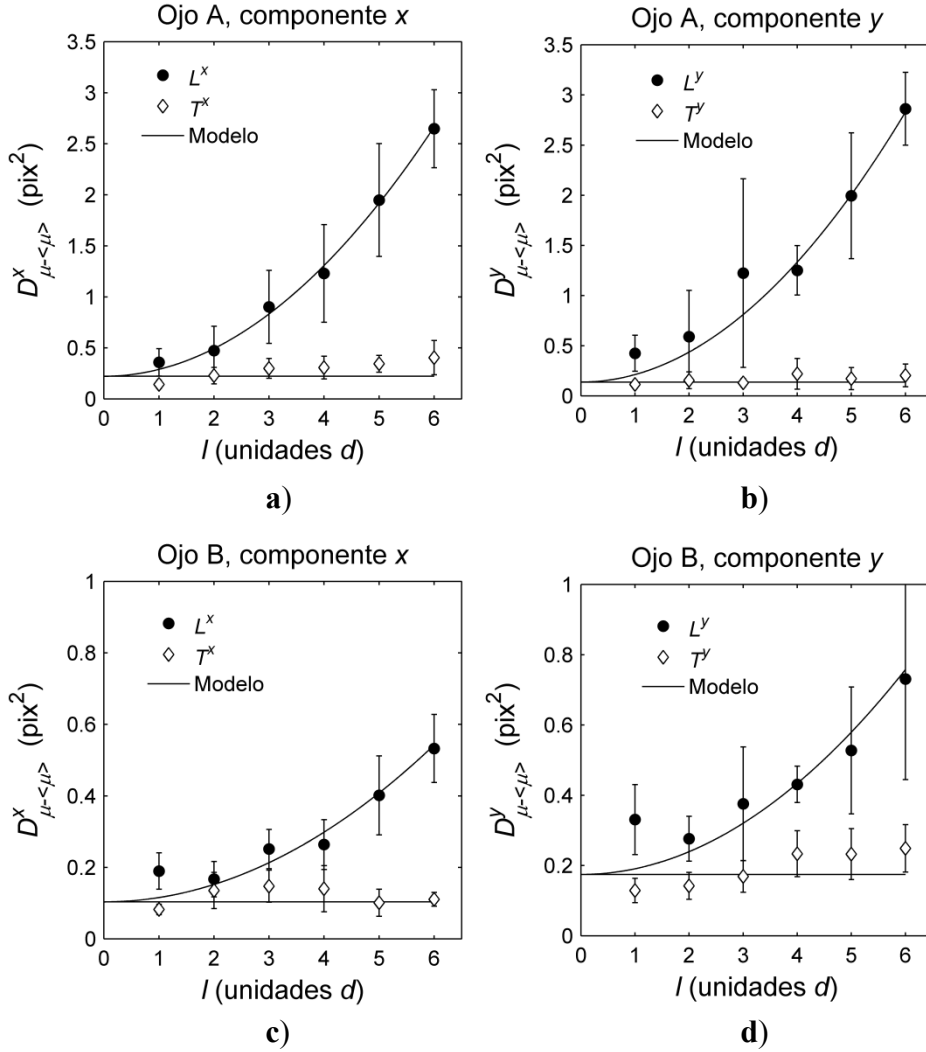
La tabla 5.2 recoge los resultados de los ajustes del modelo de desenfoque a los datos de las varianzas cuando se descuentan los prismas con el procedimiento presentado. Se observa que los coeficientes de determinación de los nuevos ajustes del ojo A son menores, aunque siguen siendo razonablemente altos:  $R^2 \sim 0.8$ . En cambio, los coeficientes de los ajustes del ojo B son similares a los de la tabla 5.1. Por lo que respecta a los descentramientos oculares promedio,  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$ , la sustracción de los prismas hace que para el ojo A sus valores absolutos sean del orden de  $L/2$ . El valor estimado para  $\langle b_x \rangle$  también decrece para el ojo B. Por lo que respecta a los valores obtenidos para  $\sigma_a$ , estos son ligeramente menores que los de la tabla 5.1, pero se verá que están más próximos a los estimados con los ajustes de las funciones de estructura.

En la figura 5.12 se representan los valores experimentales de la LSSF y la TSSF de las componentes  $x$  e  $y$  de los ojos A y B. Estas funciones se estiman para diferentes separaciones entre pares de microlentes usando la expresión (5.13), en la que se promedian los resultados obtenidos para los  $H$  pares separados por el mismo vector  $\Delta \mathbf{r}$ . La abscisa  $l$  de las gráficas da la separación en unidades de lado de microlentes,  $d$ . Cada barra de error es igual a la desviación típica de los valores de la función de estructura en la muestra de pares de microlentes separadas por el mismo vector (se muestra la desviación típica en lugar del error estándar porque la primera magnitud da idea del resultado de la prueba de chi cuadrado). Nótese que para estos ojos hay una mayor

variabilidad entre pares para la LSSF que para la TSSF, como indican las barras de error. Las curvas continuas de la figura se obtienen ajustando el siguiente modelo:

$$L_{\mu}^u(l) = q_1 l^2 + q_2 \quad T_{\mu}^u(l) = q_2 \quad (5.58)$$

De acuerdo con el apartado 5.4.2, estas expresiones recogen las dependencias predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque con una modificación: la inclusión de la constante  $q_2$ . Según la expresión (5.46),  $q_1 = \sigma_a^2 d^2$ .



**Figura 5.12:** Valores de la LSSF (círculos negros) y de la TSSF (rombos blancos) para las componentes  $x$  e  $y$  de los ojos A [figuras a) y b)] y B [figuras c) y d)]. La abscisa  $l$  es la distancia normalizada entre cada par de microlentes. Las barras de error son las desviaciones típicas de los valores para cada separación  $l$ . Las líneas continuas son ajustes por mínimos cuadrados ponderados del modelo de desenfoque.

Se realiza un único ajuste para cada componente  $u$  de cada ojo, usando las expresiones y los datos de la LSSF y de la TSSF. Como las desviaciones típicas de los datos muestran una fuerte variabilidad entre la LSSF y la TSSF para estos ojos, se usa el

método de mínimos cuadrados ponderados. De nuevo, se construye un sistema  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}\mathbf{q}$ . La nueva solución es  $\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}$ , donde  $\mathbf{S}$  es una matriz diagonal formada por las varianzas de los datos experimentales. La incertidumbre de los parámetros del ajuste se halla ahora a partir de  $\mathbf{B}_{\hat{\mathbf{q}}} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Q})^{-1}$ .

Los resultados de la figura 5.12 se usan para estudiar la compatibilidad del modelo de fluctuaciones de desenfoque con los datos. Para ello se emplea una prueba chi cuadrado, cuyas características se resumen ahora. Sea  $y$  una variable dependiente de otra variable  $x$  y sea  $y = f(x)$  un modelo de esa dependencia. Se dispone de  $L$  medidas  $\{y_1, \dots, y_L\}$  de  $y$ , cada una asociada con un correspondiente valor de  $x$ ,  $\{x_1, \dots, x_L\}$ . La compatibilidad de modelo y datos se puede estudiar calculando la siguiente estadística:

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^L [y_l - f(x_l)]^2 / s_l^2 \quad (5.59)$$

Aquí  $s_l$  es la desviación típica de cada  $y_l$ . Intuitivamente, valores pequeños de  $\chi^2$  se corresponden con un buen acuerdo entre teoría y datos. Si se supone que cada  $y_l$  sigue una distribución gaussiana con valor medio  $f(x_l)$  y cierta varianza, entonces la variable  $\chi^2$  sigue una distribución de chi cuadrado con un número de grados de libertad  $\nu = L - R$ .  $R$  es el número de ligaduras o de parámetros obtenidos a partir de los datos por medio de relaciones lineales (por ejemplo, mediante un ajuste por mínimos cuadrados). La prueba se basa en el cálculo de la probabilidad  $P = P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$ , donde  $\chi_0^2$  es el valor de (5.59) para el experimento (Frieden 1991: 296). Si  $P$  es alto, significa que existe una alta probabilidad de que las diferencias entre teoría y experimentos se deban a la mera aleatoriedad, por lo que no se puede descartar la validez del modelo postulado. Si  $P$  es bajo, el experimento es significativo, i. e., datos y teoría no son compatibles. Al valor de  $P$  en tanto por ciento se le denomina nivel de significatividad. Valores típicos exigidos para el nivel de significatividad son del 5 % o del 1 %, este último más exigente (Frieden 1991: 296).

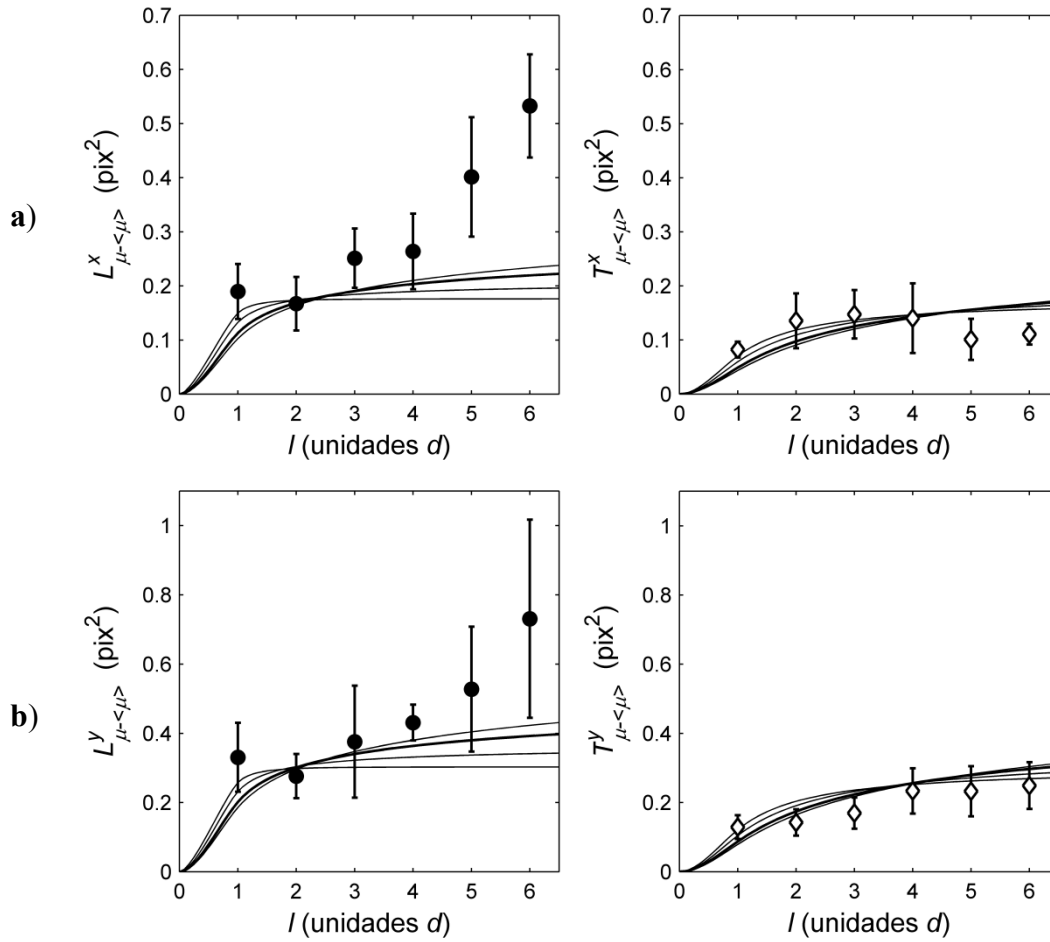
Los resultados de los ajustes se recogen en la tabla 5.3. Para el ojo A, los valores de la desviación típica del desenfoque obtenidos a partir de los ajustes de las componentes  $u = \{x, y\}$  son  $\sigma_a = 0.20 \pm 0.01$  D y  $\sigma_a = 0.21 \pm 0.01$  D, respectivamente. Las dos estimaciones están muy próximas entre sí y son ligeramente inferiores a los valores de  $\sigma_a$  obtenidos a partir de los ajustes de las varianzas de los centroides (cf. la tabla 5.1); sin embargo, son muy similares a los valores obtenidos tras sustraer los prismas (cf. la tabla 5.2). La desviación típica en la serie del coeficiente de Zernike de

desenfoque obtenido con un ajuste de  $M=35$  modos es de 0.18 D. El número de grados de libertad de la distribución chi cuadrado de cada componente es  $\nu = L - R = 12 - 2$ . Con este dato y el valor de  $\chi_0^2$ , se obtiene que  $P=0.581$  para la componente  $x$  y  $P=0.981$  para la componente  $y$ . Estos valores están lejos del nivel de significatividad del 5 %, por lo que no se puede descartar la validez del modelo de fluctuaciones de desenfoque para la serie del ojo A. Respecto al ojo B, la desviación típica del desenfoque estimada con los ajustes es  $\sigma_a = 0.083 \pm 0.007$  D para la componente  $x$  y  $\sigma_a = 0.096 \pm 0.009$  D para la componente  $y$ . De nuevo, estos valores están más próximos a los estimados con las varianzas de los centroides cuando estas últimas se calculan descontando los prismas. La desviación típica del coeficiente de Zernike de desenfoque ligado a un ajuste de  $M=35$  modos es 0.07 D. Por otro lado,  $P=0.734$  para la componente  $x$  y  $P=0.662$  para la componente  $y$ , por lo que tampoco se puede rechazar el modelo de desenfoque para el ojo B.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\Gamma$ (mm)	$\chi_\nu^2$	$P$
A	$x$	$0.20 \pm 0.01$	$1.0 \pm 0.1$	0.85	0.581
	$y$	$0.21 \pm 0.01$	$0.8 \pm 0.1$	0.30	0.981
B	$x$	$0.083 \pm 0.007$	$1.6 \pm 0.2$	0.69	0.734
	$y$	$0.096 \pm 0.009$	$1.9 \pm 0.3$	0.77	0.662

**Tabla 5.3:** Resultados de los ajustes de las predicciones teóricas del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las funciones de estructura. Nota que  $\Gamma = d\sqrt{q_2/q_1}$  y  $\chi_\nu^2 = \chi_0^2/\nu$ .

Es de destacar que el parámetro  $q_2$  es mayor que cero para todos los ajustes. Este fenómeno podría ser atribuible a una incorrecta estimación de la contribución del ruido a las funciones de estructura, bien debido a una subestimación del valor de  $2\sigma_\eta^2$  o al no cumplimiento de las suposiciones realizadas en la sección 5.3 (e. g., debido a la existencia de cierta correlación del ruido y las aberraciones oculares). Otra posibilidad es que este comportamiento se deba a la contribución de las fluctuaciones de aberraciones de alto orden. El parámetro  $\Gamma = d\sqrt{q_2/q_1}$  recogido en la tabla 5.3 es equivalente al valor del producto  $d\gamma$  para la lorentziana (5.47) ligada al parámetro  $\tau_m^u$  del modelo de fluctuaciones de desenfoque. Por tanto, da la semianchura a media altura de la curva en dimensiones de longitud. No obstante,  $\Gamma$  se ha obtenido a partir de los ajustes de las expresiones teóricas de las funciones de estructura de  $\tilde{\mu}_u$  y no de  $\tilde{m}_u$  y, además, es posible que al valor de  $q_2$  contribuyan fuentes distintas del ruido, a diferencia de lo que predice el modelo.



**Figura 5.13:** Ajustes por mínimos cuadrados ponderados de modelos de ley de potencias a las LSSF y TSSF de las componentes a) x y b) y del ojo B. Se realiza un ajuste por exponente y componente. Se usan los exponentes  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12, 46/12$ . La curva de Kolmogorov tiene mayor espesor.

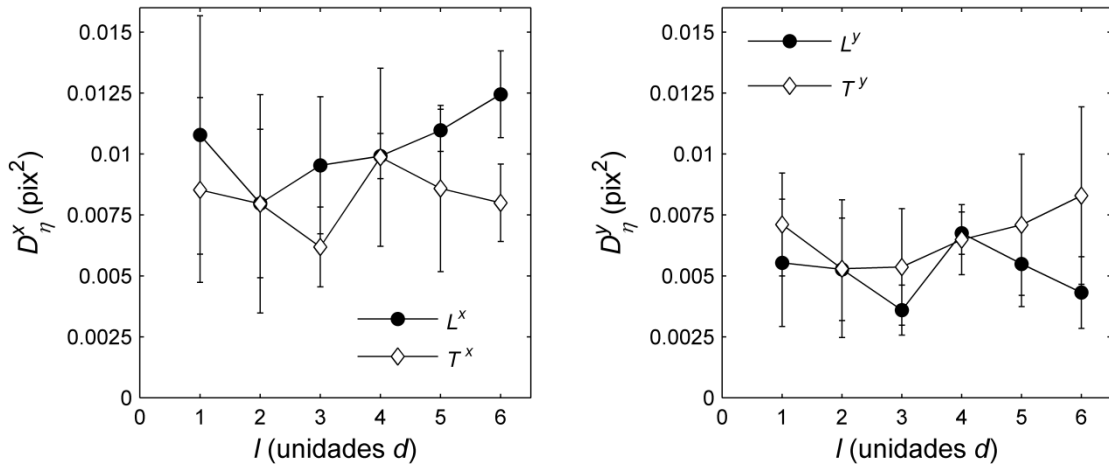
Los datos de las funciones de estructura también se pueden usar para estudiar la compatibilidad de los modelos de ley de potencias con la estadística de los ojos A y B. La expresión (5.32) da las integrales a evaluar para obtener las curvas teóricas de la LSSF y la TSSF. Nótese que si se fija el valor del exponente  $\beta$ , el único parámetro a ajustar es un factor multiplicativo. Por tanto, la estrategia a seguir será ajustar por mínimos cuadrados un conjunto de leyes de potencias con exponentes significativos. Por ejemplo, consideramos el conjunto  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ , en el que el tercer exponente es el de Kolmogorov. Se halla un único factor multiplicativo por exponente para la LSSF y la TSSF de cada componente  $u$ . Por consiguiente, al igual que se hizo con el modelo de fluctuaciones de desenfoque, se realiza un único ajuste de mínimos cuadrados por valor de  $\beta$  usando los modelos y datos de ambas funciones.

La figura 5.13 muestra los resultados de los ajustes de los modelos de ley de potencias a los datos de las LSSF y las TSSF del ojo B. Se tiene que  $\nu = L - R = 12 - 1$



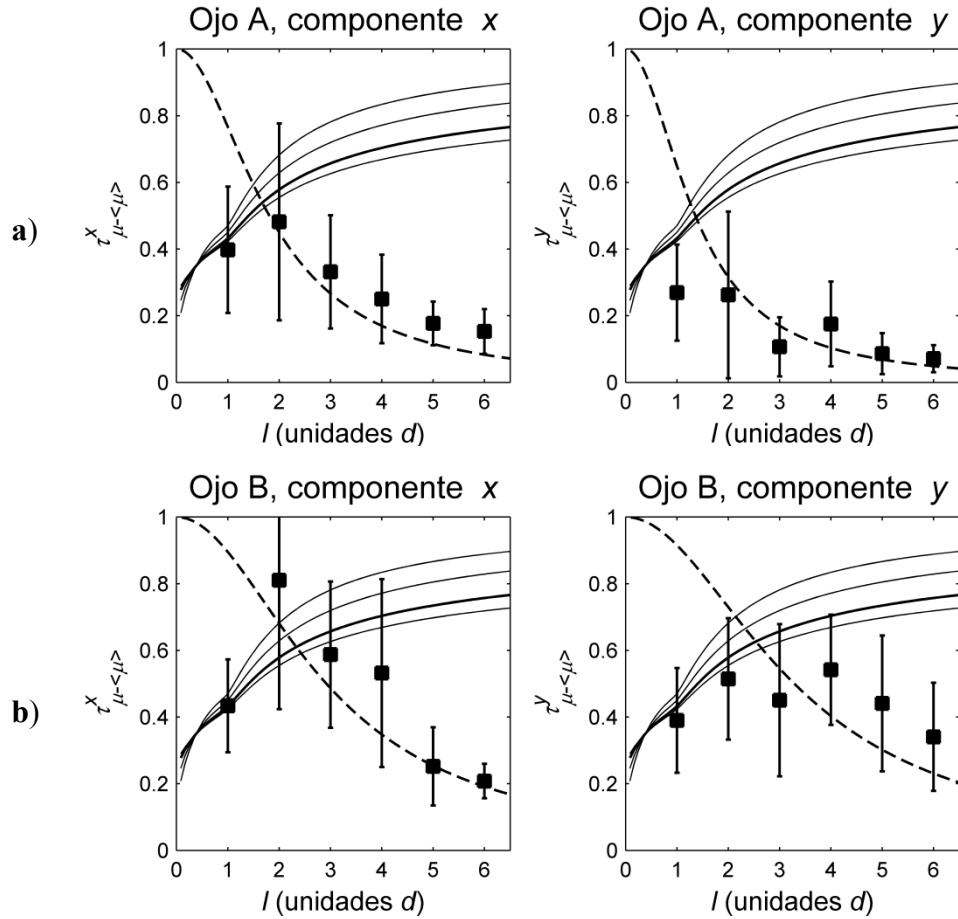
en cada ajuste. Para la componente  $y$  de los centroides no hay significatividad:  $P=0.143$  para el exponente  $\beta=36/12$ ,  $P=0.317$  para  $\beta=40/12$ ,  $P=0.506$  para Kolmogorov y  $P=0.561$  para  $\beta=46/12$ . En cambio, para la componente  $x$  la prueba de chi cuadrado concluye que el experimento es significativo para todos los exponentes  $\beta$  mostrados con un nivel de significatividad del 1 %. Respecto al ojo A, el experimento es significativo al 1 % para todos los exponentes y componentes, por lo que se descartan los modelos de leyes de potencias. Se podría realizar la prueba obligando a que en los ajustes de las dos componentes de cada ojo apareciese el mismo factor multiplicativo.

Para el cálculo de las funciones de estructura experimentales de este apartado se ha modelado la contribución del ruido como  $D_{\eta}^u(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_t) = 2\sigma_{\eta}^2$ . Según la sección 5.3, esa igualdad se verifica si cada componente del ruido no está correlacionada en las diferentes subpupilas y si las varianzas son iguales en todas las microlentes y para ambas componentes. La figura 5.14 grafica las funciones de estructura del ruido que se obtendrían sin estas suposiciones. Los valores mostrados son al menos un orden de magnitud más pequeños que los de los ojos y son aproximadamente constantes con  $l$ .



**Figura 5.14:** LSSF y TSSF de las componentes  $u=\{x, y\}$  del ruido.

En la figura 5.15 se grafica el parámetro tau  $\tau_{\mu}^u(l)$  para las componentes  $x$  e  $y$  de los ojos A y B. Se representan también las curvas teóricas de los modelos de desenfoque y de leyes de potencia. La curva rayada es la lorentziana asociada al modelo de fluctuaciones de desenfoque usando los coeficientes  $q_1, q_2$  obtenidos con el ajuste (5.58) de la función de estructura. Por tanto, el parámetro  $\Gamma$  recogido en la tabla 5.3 da las semianchuras a media altura de estas curvas (en mm). Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta=\{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ . Están totalmente definidas por el exponente de cada ley, por lo que no precisan de ajustes.



**Figura 5.15:** Parámetro tau de las componentes  $x$  e  $y$  de los ojos A [figuras a)] y B [figuras b)]. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque construidas a partir de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias (la más gruesa es la de Kolmogorov).

En las gráficas de la componente  $x$  de ambos ojos, para  $l > 1$  los valores experimentales siguen el decaimiento con  $l$  del modelo de fluctuaciones de desenfoque. En cambio, para  $l = 1$  el parámetro tau experimental vale la mitad que lo predicho por este modelo. Esto se corresponde con cierto decrecimiento de la TSSF en relación con la predicción del modelo para  $l = 1$  en la figura 5.12a) y un ligero incremento de la LSSF en la figura 5.12c). El comportamiento experimental es marcadamente diferente del crecimiento con  $l$  predicho por los modelos de ley de potencias. Para la componente  $y$  del ojo A los valores experimentales son de nuevo inferiores a los predichos por el modelo de desenfoque para bajo  $l$ , mientras que están bien descritos por él para alto  $l$ . La componente  $y$  del ojo B presenta elevadas desviaciones típicas para todos los datos representados. Para  $l < 3$  el comportamiento de este parámetro tau es similar al de las leyes de potencias, mientras que para  $l > 3$  su valor decae con  $l$ .

## Capítulo 6

# RECOGIDA Y PROCESADO DE DATOS EXPERIMENTALES

En este capítulo se describe la recogida y el procesado de los datos experimentales de la principal muestra de ojos considerada en esta tesis. Por su parte, en el capítulo 7 se recogen los resultados obtenidos al estudiar la estadística de estos ojos con los métodos del capítulo 5. Las medidas se realizaron con un sensor HS, que es diferente del empleado con los ojos del apartado 5.5.2. Se midió un conjunto más amplio de ojos de personas con visión normal, es decir, sin patologías oculares. En esta ocasión, los datos fueron tomados en el laboratorio del grupo de Luis Diaz-Santana, en la City University.

La sección 6.1 se ocupa del proceso de toma de medidas. Se comentan las características de la muestra de ojos empleada (apartado 6.1.1) y se describen el montaje óptico y el sensor HS utilizados (apartado 6.1.2). La sección 6.2 trata de la determinación de las componentes de los desplazamientos de los centroides a partir de las imágenes de la cámara del sensor. Se describe el procesado de las imágenes de referencia (apartado 6.2.1), el procedimiento utilizado para seguir los movimientos de traslación transversales de la pupila (apartado 6.2.2), la técnica de umbralización usada para el cálculo de los centroides (apartado 6.2.3), así como la interfaz gráfica empleada para supervisar las tareas anteriores (apartado 6.2.4). La sección 6.3 describe la estimación de las magnitudes estadísticas de los centroides presentadas en el capítulo 5. En particular, se discuten los algoritmos aplicados para facilitar el análisis de los datos (apartado 6.3.1) y se trata la estimación de la estadística del ruido y su contribución a las magnitudes estadísticas de los desplazamientos de los centroides (apartado 6.3.2).

## 6.1 Recogida de medidas

Las medidas de las aberraciones de la muestra de ojos fueron tomadas por el grupo de Luis Diaz-Santana, de la City University. El protocolo de medida utilizado fue aprobado por el comité local de investigación y ética. Todas las personas que participaron en el estudio firmaron impresos de consentimiento informado, de acuerdo con los principios de la declaración de Helsinki.

### 6.1.1 Muestra de ojos

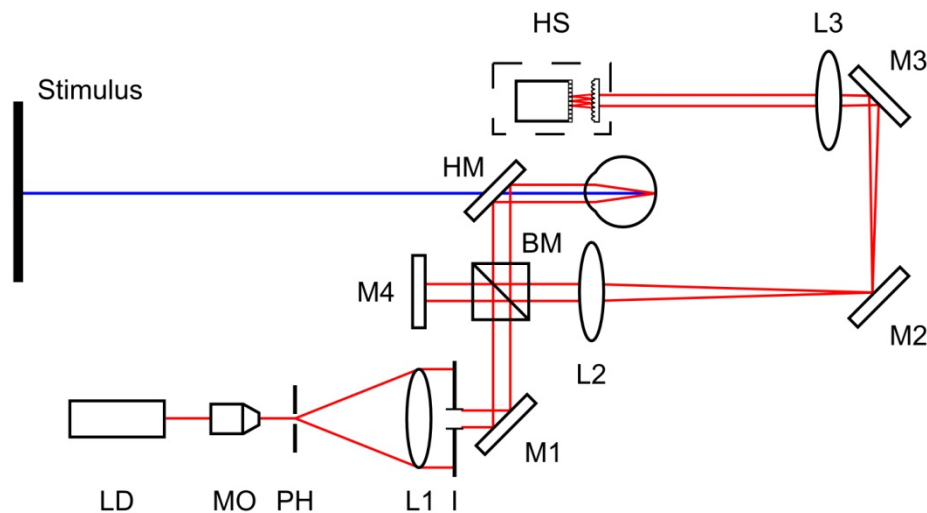
Ninguno de los ojos medidos sufría patología alguna ni tenía un historial de cirugía refractiva. Dentro de la muestra se distinguen dos grupos en función de la edad de las personas. El conjunto más grande (grupo G1) se corresponde con 41 ojos pertenecientes a 21 personas con edades comprendidas entre los 45 y los 65 años. Se descartaron las dos series de uno de los sujetos por la baja relación señal-ruido de las imágenes del HS, con lo que se analizaron 39 ojos de 20 personas. No se pudieron medir los errores refractivos de los ojos de este grupo. Se preguntó a las personas que llevaban corrección oftálmica por su prescripción; el rango de errores refractivos esféricos equivalentes de las respuestas es de  $[-4.75, 2.50]$  D. Buena parte de las personas pertenecientes a este grupo no eran expertos en la materia ni estaban habituados a este tipo de medidas. El segundo conjunto (grupo G2) está formado por 12 ojos de 6 personas por debajo de los 45 años. El valor medio de sus errores refractivos esféricos equivalentes es  $-2.25$  D, su desviación típica es 3 D y su rango  $[-6.75, 0]$  D.

### 6.1.2 Montaje óptico y sensor de frente de ondas

El montaje óptico empleado fue el mismo que en un estudio previo del grupo de Diaz-Santana (Diaz-Santana et al. 2007) con las siguientes diferencias: se usó una vergencia diferente para el estímulo visual, además de una matriz de microlentes y una cámara distintas. La figura 6.1 muestra un esquema del montaje. La configuración permite que durante las sesiones de medida se fije binocularmente un estímulo situado a 3 m de distancia. No obstante, la medida de las aberraciones es monocular: se mide cada ojo por separado. La cabeza se estabilizó con un soporte para la barbilla. La iluminación ambiental se mantuvo a bajos niveles para permitir la dilatación natural de la pupila. Además, la acomodación se dejó sin paralizar y los errores refractivos sin corregir.

La fuente empleada para medir las aberraciones fue un diodo láser a 780 nm. Un divisor de haz (BM) dividía el haz del láser, filtrado y colimado, en dos brazos. El

primero constaba de un espejo (M4), que reflejaba la onda plana utilizada en las medidas de referencia. Durante la medida de las aberraciones oculares, este brazo se mantuvo bloqueado y sólo se utilizó el segundo, en el que se situaba el ojo a medir. Un sistema de lentes conjugaba el plano de la pupila ocular con el de las microlentes del HS. Las microlentes eran cuadradas, todas con el mismo tamaño y orientación. Sus centros estaban distribuidos en una red cuadrada y el factor de llenado era próximo a la unidad ( $L = d$ ). La distancia focal nominal de las microlentes era  $f = 7.5$  mm, pero tras la calibración del sensor se encontró que la distancia efectiva con el plano de la cámara CCD era de  $z = 8.0$  mm (Pfund et al. 1998b). Tras tener en cuenta el aumento  $A = 0.8$  introducido por el sistema de lentes, los tamaños efectivos del lado de las microlentes y del tamaño de píxel en el plano de la pupila ocular eran de  $d = 270$   $\mu\text{m}$  y  $11.4$   $\mu\text{m}$ , respectivamente. Así, los  $784 \times 576$  píxeles de la cámara se correspondían con  $[\Delta x, \Delta y] = [8.9, 6.6]$  mm en ese plano. Las imágenes se capturaron a 24 Hz durante un mínimo de 5 s para cada ojo. Se tomó una única serie temporal por ojo.



**Figura 6.1:** Esquema del montaje de la City University. El estímulo se ve a través de un espejo caliente (HM), que transmite la luz visible y refleja las altas longitudes de onda de medida de las aberraciones. La fuente es un diodo láser (LD) a 780 nm, filtrado espacialmente por un objetivo de microscopio (MO) y un *pinhole* (PH). La lente L1 colima el haz, mientras que el iris I, de 1 mm de diámetro, limita la sección del mismo que incide sobre el ojo. La pupila ocular está conjugada con el plano de las microlentes del sensor HS gracias a las lentes L2 ( $f = 250$  mm) y L3 ( $f = 200$  mm). El resto de componentes son un divisor de haz (BM) y varios espejos (M1, M2, M3, M4).

La no utilización de fármacos ciclopégicos y el uso de fijación binocular y del estímulo visual obedecen al deseo de realizar las medidas bajo condiciones naturales de visión. Usar el monitor para la fijación en lugar del haz del diodo láser introduce un

pequeño error en el ángulo del eje usado, con independencia de los desalineamientos que se produzcan durante cada serie temporal (Díaz-Santana et al. 2007).

Como se recoge en la sección 4.2, diferentes estudios han encontrado que los espectros de las aberraciones de ojos sanos estimadas en sensores HS decaen con fuerza con la frecuencia temporal. Por tanto, los 24 Hz usados en la toma de datos se antojan suficientes para capturar las fluctuaciones con mayor potencia asociada (varianza por frecuencia temporal), que provocarán los cambios de mayor magnitud en los valores de  $W(\mathbf{r})$  en cada instante  $k$  de medida. Además, con la configuración presentada, en la que se usa una fuente de alta coherencia, no es conveniente incrementar el valor de la frecuencia de adquisición. Se aumentaría entonces el *speckle*, cuya presencia ya es notoria en muchas imágenes del sensor con la frecuencia citada.

En relación con la duración de las series de medida disponibles, esta varía fuertemente de un sujeto a otro e incluso entre las series de los dos ojos de una misma persona. En general, las series del grupo de menor edad son de mayor duración, superior a 15 s en todos los ojos. La duración mínima de las series del grupo de más edad es de 5 s. La razón de que se disponga de series de mayor duración para el grupo G2 se debe a que estas medidas se tomaron antes que las del grupo G1, en un momento en el que los programas de seguimiento de la pupila estaban siendo probados. No obstante, para el presente estudio habría sido conveniente disponer de series de mayor duración para algunos de los ojos del grupo G1. Nótese que el número final  $K$  de medidas disponibles depende no sólo de la duración de la serie, sino también del algoritmo de seguimiento de la pupila, que se describe en el apartado 6.2.2, y de la eliminación de medidas espurias asociadas a parpadeos.

Otro factor de interés es el tamaño de la pupila ocular que se puede analizar para cada ojo y grupo. De esta magnitud dependen la cantidad de microlentes a usar en el análisis o los valores de la separación  $l$  entre pares de microlentes en los que se evalúan algunas funciones estadísticas. El tamaño de la pupila ocular se puede estimar a partir de las imágenes del HS y su valor fluctúa a lo largo de una determinada serie temporal. En todos los ojos del grupo G2 el radio de la pupila ocular es superior a los  $R_p = 2.80$  mm. Por ello, optamos por analizar para todos los ojos del grupo los datos de las microlentes que estén completamente contenidas en un círculo con dicho radio. Se usa el procedimiento de seguimiento de pupila descrito en el apartado 6.2.2, por lo que en cada medida el centro del círculo está situado en una posición diferente de la imagen.

Además, como el método de seguimiento tiene las características descritas en el apartado 5.5.1, se considera el mismo número  $N$  de microlentes para todas las medidas. Para el grupo G2,  $N = 293$  y  $l_{\max} = 18$ . Para el grupo G1 la cota inferior del radio desciende hasta  $R_p = 2.45$  mm, con la excepción de tres ojos pertenecientes a dos personas diferentes. En este caso,  $N = 221$  y  $l_{\max} = 16$ .

Se ha mencionado que el estímulo visual se encuentra a la misma distancia, 3 m, para todos los sujetos y que los errores refractivos se dejaron sin corregir. Esto provoca que la demanda acomodativa sea diferente para cada sujeto. Como se comentó en la sección 4.2, las fluctuaciones de la acomodación dependen del valor medio de la respuesta acomodativa. Es, por tanto, posible que en los diferentes ojos haya una contribución más o menos importante de las fluctuaciones del desenfoque debido a los diferentes valores de la demanda de acomodación.

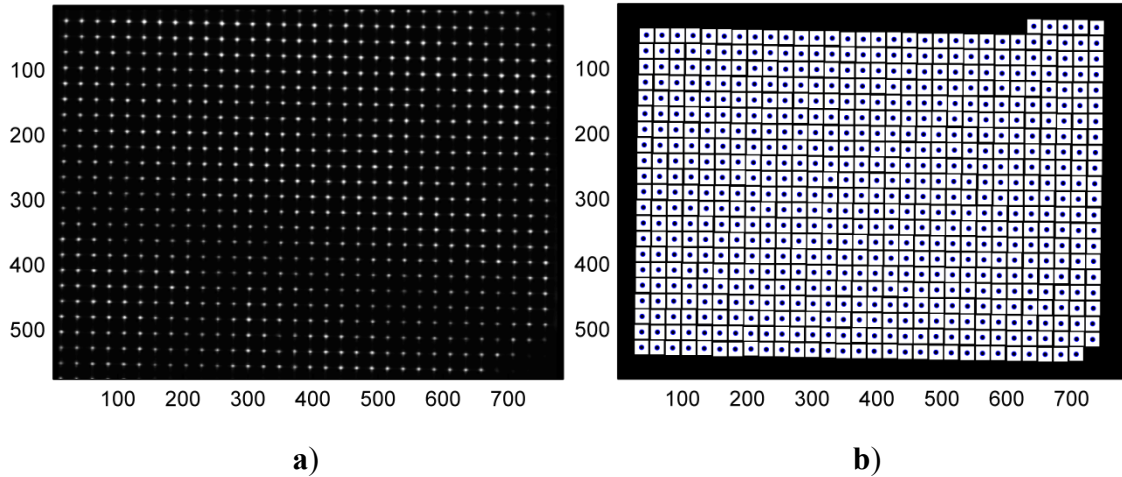
## 6.2 Estimación de los desplazamientos de los centroides

La estimación de los desplazamientos de los centroides se realizó con posterioridad a la toma de datos, aplicando los algoritmos que se describen en esta sección a las imágenes capturadas por la cámara. Para conocer el valor de dichos desplazamientos, se necesita determinar tanto los centroides de los *spots* obtenidos durante las medidas con ojos experimentales como las posiciones de referencia en presencia de un frente plano. Además, es necesario realizar un seguimiento de los movimientos oculares para determinar qué microlentes están muestreando cada región de la pupila ocular. En esta sección se presentan los métodos utilizados para estas tareas.

Las imágenes de los *spots* de las microlentes fueron reprocesadas por el autor de la tesis usando los programas desarrollados por el grupo de Luis Diaz-Santana. Las modificaciones introducidas por el doctorando a los mismos se mencionan explícitamente.

### 6.2.1 Procesado de las referencias

Se realizó una serie de medidas de referencia en todas las sesiones en las que se tomaron datos de las aberraciones oculares. Los valores estimados para  $\mathbf{c}_R(\mathbf{r}_n)$  se usaron como posiciones de referencia para todos los ojos medidos en cada jornada. Se comenta brevemente el procedimiento seguido para su determinación.



**Figura 6.2:** Ejemplo de a) promedio de las imágenes del HS para una serie de medidas de referencia y b) posiciones de referencia estimadas y ventanas correspondientes a la imagen a). Los ejes están en píxeles.

El número de imágenes de referencia tomadas cada día no fue el mismo en todas las sesiones, pero fue del orden de  $K = 200$ . Para el cálculo de las posiciones de referencia se usó la imagen promedio de toda la serie. Aunque esta imagen promedio es bastante robusta, se empleó un pequeño filtro espacial de mediana para reducir todavía más el efecto del ruido (González y Woods 1996: 209). A la imagen resultante se le aplicó un umbral para discriminar a los *spots* del fondo. A continuación, se usó un algoritmo de etiquetado de objetos en imágenes binarias, que asocia la misma etiqueta a todos los píxeles iguales a 1 que estén conectados entre sí (González y Woods 1996: 46). El algoritmo de base fue modificado por el doctorando debido a la detección de máximos secundarios en algunas microlentes, que eran identificados erróneamente como nuevos *spots*; el problema se solventó simplemente comparando la distancia entre los objetos detectados con la separación conocida entre microlentes. A continuación, la posición de referencia asociada a cada microlente se estimó usando la ecuación (2.31) para calcular el centroide de los niveles de gris de los píxeles asociados a cada objeto. Finalmente, de entre todos los centroides de referencia calculados se descartaron aquellos más cercanos a los bordes de cada imagen.

A partir de cada posición de referencia se define una ventana cuadrada con un lado ligeramente menor que el espaciado  $L$  entre microlentes. En principio cada ventana está centrada en su respectiva posición de referencia y define la región finita del plano de pupila en la que se estimará el centroide experimental asociado a cada microlente en presencia de aberraciones (esta es la región  $\Sigma'$  del capítulo 2). Es posible que las aberraciones oculares posean un prisma que desplace sistemáticamente las posiciones de sus centroides con respecto de los centros de las microlentes, de modo que los *spots* se



encuentren próximos a los bordes de las correspondientes ventanas. En estas situaciones, a las ventanas se les puede aplicar de forma empírica una traslación que compense dicho efecto. Salvo por la traslación, los centros de las ventanas están distribuidos del mismo modo que las posiciones de referencia. En la figura 6.2 se muestran las posiciones de referencia y las ventanas para un caso particular.

### 6.2.2 Seguimiento de la pupila y eliminación de parpadeos

Los movimientos de la pupila ocular pueden alterar la estadística de los desplazamientos de los centroides observada con nuestro procedimiento. Para los modelos propuestos en la sección 5.4 muchas magnitudes estadísticas dependen tan sólo de la separación  $\Delta \mathbf{r}$  entre los centros de un par de microlentes, por lo que se podría pensar que son inmunes a las traslaciones. No obstante, nuestro método requiere de la estimación de los valores medios  $\langle \mu_u(\mathbf{r}_n) \rangle$  para su posterior sustracción. Como estas estimaciones se obtienen a partir de la misma serie de medida, se ven afectadas por los movimientos oculares. Como se ha comentado, muchos de los fijadores del grupo G1 no están habituados a este tipo de pruebas y el sistema de estabilización consiste en un reposo para la barbilla. Por ello en algunas series temporales se observan movimientos importantes de la pupila ocular.

Se persigue, por tanto, determinar la posición de la pupila ocular respecto de la matriz de microlentes en cada medida. Para realizar este seguimiento, se usan en exclusiva las imágenes de la cámara CCD, sin ningún tipo de dispositivo de medida adicional. Esta vía ha sido seguida con anterioridad en otros trabajos, aunque la técnica aquí empleada es ligeramente diferente (Thibos et al. 2002c, Arines et al. 2010).

El procedimiento se basa en la aplicación de un umbral  $t_{\text{tk}}$  a los picos de intensidad obtenidos en cada ventana  $n$  para la realización  $k$ ,  $d_{\text{max}}^{(n,k)}$ . Se considera que las ventanas cuyos picos superan el umbral pertenecen a las microlentes que muestrean a la pupila ocular en cada medida. Por el contrario, se supone que aquellas que no lo superan están ligadas al fondo, por lo que son descartadas. El valor del umbral  $t_{\text{tk}}^{(k)}$  se determina como una fracción del promedio de los picos de intensidad de cada realización:

$$t_{\text{tk}}^{(k)} = u_{\text{tk}} N_T^{-1} \sum_{n=1}^{N_T} d_{\text{max}}^{(n,k)} \quad (6.1)$$

En esta expresión,  $N_T$  es el número total de subpupilas de la matriz (distinto del número de microlentes que muestrean a la pupila ocular o del número usado en el análisis). El

valor utilizado con más frecuencia para la fracción es  $u_{tk} = 0.3$ . En ocasiones es necesario reajustar empíricamente esta constante para algunos ojos.

El siguiente paso es determinar la posición del centro de la pupila ocular,  $\mathbf{b}$ . Las coordenadas estimadas para dicho punto,  $[\hat{b}_x, \hat{b}_y]$ , son iguales a las medianas de las coordenadas de las microlentes que muestrean a la pupila (i. e., que superan el umbral de seguimiento). Esta técnica se muestra muy robusta tanto frente a falsos negativos como a falsos positivos (esto es, subpupilas que por efecto del *speckle*, del ruido o del fondo son clasificadas incorrectamente). No obstante, su exactitud está limitada por el hecho de que las filas y las columnas del patrón están separadas por una distancia  $L$ . Por tanto, para nuestro sensor el procedimiento tiene una incertidumbre del orden de  $\pm 135\mu\text{m}$ , superior al valor que se puede conseguir con otras técnicas (Arines et al. 2010); sin embargo, la necesidad de usar el procedimiento dado por (5.54), que asocia con una localización en la pupila ocular a los centroides de las microlentes situadas en una vecindad de la misma, ya impone un error del orden de  $L/2$  en el seguimiento.

El último paso a realizar consiste en seleccionar de entre todas las subaperturas que hayan superado cada umbral  $t_{tk}^{(k)}$  aquellas que estén contenidas en un círculo centrado en la posición  $\mathbf{b}$  estimada y con el radio  $R_p$  deseado. Tanto para la estimación del centro de la pupila como para la determinación de las subaperturas que pertenecen a ella en cada medida se prefiere el uso de las posiciones de referencia  $\mathbf{c}_R(\mathbf{r}_n)$  al de las posiciones de los centroides experimentales  $\mathbf{c}(\mathbf{r}_n)$ . Esto se debe a que estas últimas magnitudes se ven afectadas por las aberraciones oculares.

La presencia de parpadeos en las medidas se detecta mediante la inspección visual de las imágenes de la cámara del HS. Esta tarea se realiza con la interfaz gráfica descrita en el apartado 6.2.4, que también sirve para supervisar el seguimiento de la pupila y la estimación de las posiciones de los centroides.

### 6.2.3 Estimación de las posiciones de los centroides

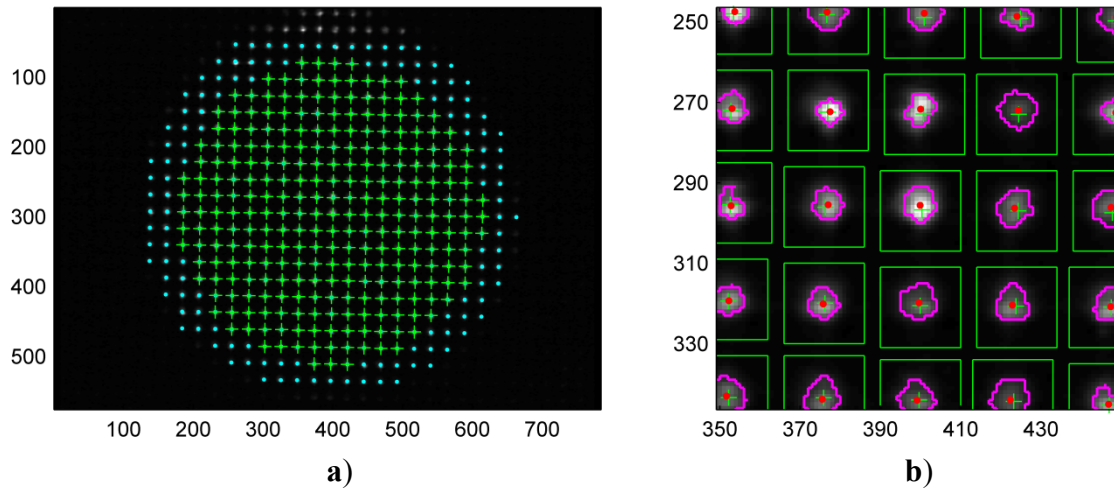
El cálculo de las posiciones de los centroides en cada subpupila se lleva a cabo usando los píxeles de las ventanas definidas al procesar las imágenes de referencia (cf. el apartado 6.2.1). Sólo se consideran las ventanas que muestrean la pupila ocular en cada medida (cf. 6.2.2). Para reducir el efecto del ruido electrónico de lectura y del fondo de la imagen, se aplica un umbral a los niveles de intensidad de los píxeles de cada región,  $t_{cen}$ . Dicho umbral es una fracción del pico de intensidad de cada ventana:

$$t_{\text{cen}}^{(n,k)} = u_{\text{cen}} d_{\text{max}}^{(n,k)} \quad (6.2)$$

El valor de la constante  $u_{\text{cen}}$  se ajusta empíricamente para cada ojo. Una vez que se dispone del umbral, la posición del centroide se calcula usando la ecuación (2.31).

#### 6.2.4 Interfaz gráfica

La supervisión del seguimiento de la pupila y de la estimación de los centroides se realiza usando una interfaz gráfica. En la interfaz existen dos partes diferenciadas: a la izquierda se encuentran diferentes botones y campos de entrada de datos, mientras que en el centro y en la parte derecha se presentan las imágenes de supervisión, que se actualizan cada cierto número de medidas. Los campos de la izquierda permiten modificar los valores de varios parámetros, como el diámetro de pupila a considerar, el número  $K$  de medidas o las constantes  $u_{\text{cen}}$  y  $u_{\text{tk}}$ . Respecto a las imágenes, dos de ellas muestran las capturas de la cámara del sensor con cierta información adicional. La tercera gráfica representa los coeficientes de Zernike estimados en cada medida.



**Figura 6.3:** Figuras mostradas por la interfaz gráfica para supervisar a) el seguimiento de la pupila ocular y b) la estimación de los centroides. El nivel de zoom usado en b) se puede configurar fácilmente.

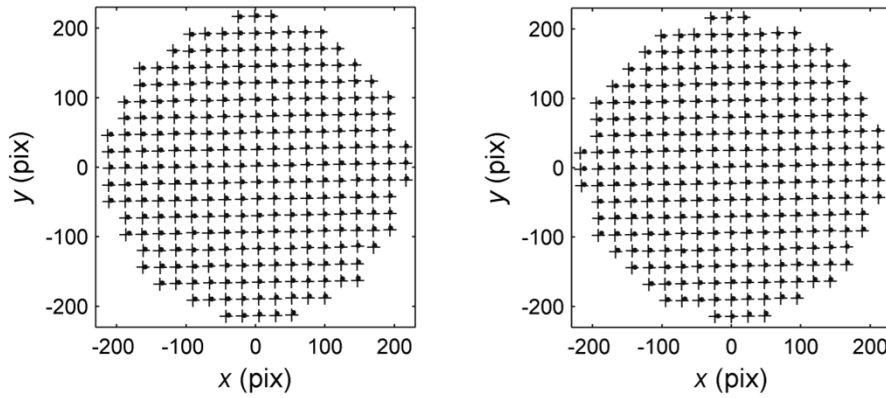
En la figura 6.3 se ilustran con un ejemplo las dos imágenes de la cámara del HS que muestra la interfaz. La figura 6.3a) permite supervisar el seguimiento de la pupila. En ella se muestra la imagen completa de la cámara para la medida  $k$ -ésima de la serie. Además, se sitúan puntos de color cian en los centros de las ventanas que superan el umbral de seguimiento  $t_{\text{tk}}^{(k)}$  y cruces verdes en los centros de las ventanas incluidas en el radio de pupila de trabajo. Nótese que la pupila ocular ocupa la extensión  $\Delta y$  de la cámara, por lo que  $D_p \cong 6.6$  mm. Con pupilas de este tamaño se pueden producir errores adicionales en la determinación de  $b_y$ . La figura 6.3b) muestra un zoom de la

figura a). Esta figura es adecuada para supervisar la estimación de los centroides. En ella, se muestran rodeadas por una curva en cian las regiones en las que los píxeles de cada subapertura superan el umbral  $t_{\text{cen}}^{(n,k)}$ . Las cruces verdes se corresponden con el centro de cada ventana, mientras que los puntos rojos son los centroides estimados.

## 6.3 Estimación de las magnitudes estadísticas de los centroides

### 6.3.1 Preparación de los datos

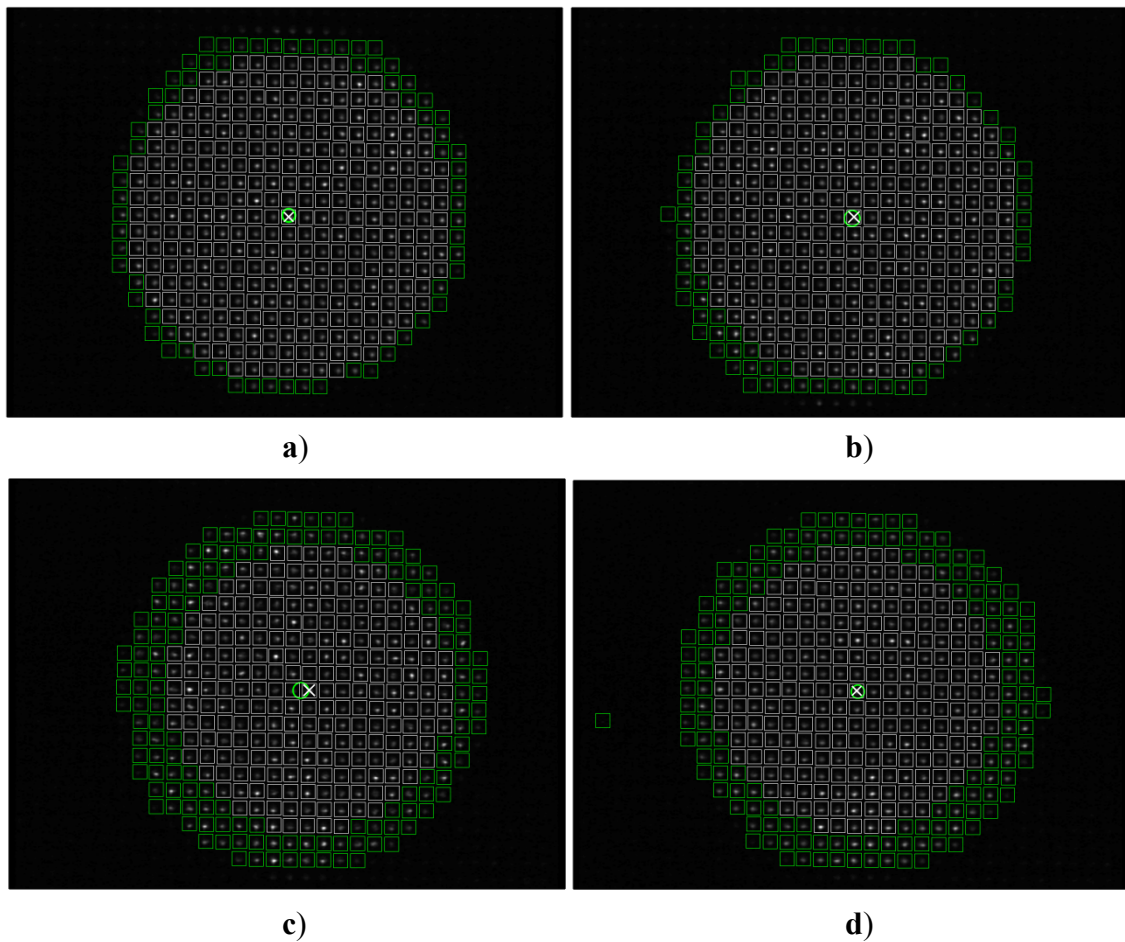
En este apartado se describen los algoritmos y aplicaciones adicionales desarrollados por el doctorando para representar los datos de manera adecuada y extraer la información relevante para aplicar los métodos del capítulo 5.



**Figura 6.4:** Posiciones de los centros de las ventanas (cruces) y de los centroides experimentales (puntos) seleccionados por el algoritmo de seguimiento de pupila del apartado 6.2.2 para dos medidas de un mismo ojo e igual radio  $R_p$ . Las posiciones están expresadas respecto a las coordenadas  $\hat{\mathbf{b}}$  estimadas para el centro de la pupila ocular. Se seleccionaron  $N=269$  y  $268$  microlentes, respectivamente.

Como se comentó en el apartado 5.5.1, los movimientos de pupila y las irregularidades de la red de muestreo provocan que las posiciones de las microlentes en relación con el centro de la pupila ocular sean diferentes en cada realización, así como el número de subpupilas seleccionadas por el algoritmo de seguimiento. En la figura 6.4 se muestra un ejemplo. Este hecho supone un obstáculo a la hora de estimar los promedios de las magnitudes estadísticas del capítulo 5 o de obtener ciertas gráficas, como el diagrama de centroides. Por ello, se opta por seguir el procedimiento descrito en el apartado 5.5.1 y usar el mismo patrón de microlentes para todas las medidas de un ojo. Este objetivo se realiza en dos pasos. En primer lugar, se supone que el centro de la pupila no se encuentra en el valor obtenido para  $\hat{\mathbf{b}}$ , sino en el centro de la microlente más cercana a este último punto. Esto equivale a que en el procedimiento del apartado

5.5.1 se considere que la localización central  $\mathbf{r}_n^*$  se corresponde con el origen de coordenadas de la pupila ocular. En segundo lugar, a la hora de determinar qué microlentes están contenidas en el radio de pupila deseado, no se tienen en cuenta ni las irregularidades ni las inclinaciones observadas en la distribución de posiciones de referencia, sino que se emplea una red “ideal” cuadrada y de lado  $L$ . La figura 6.5 muestra ejemplos de la aplicación de este método. Se seleccionan  $N=293$  microlentes para todas las realizaciones del ojo del grupo G2 y  $N=221$  para el ojo del grupo G1 (cf. el apartado 6.1.2). La imagen d) ilustra la robustez de la mediana frente a falsos positivos que superen el umbral de seguimiento.



**Figura 6.5:** Selección de las microlentes a procesar. Las imágenes a) y b) son dos medidas de un ojo del grupo G2 y las c) y d) son otras dos de un ojo del grupo G1. Se muestran: las ventanas que superan cada umbral  $t_{ik}^{(k)}$  (cuadrados en verde), la posición  $\hat{\mathbf{b}}$  estimada para el centro de pupila (círculo en verde), la posición del centro de la ventana más próxima a esta última (cruz en blanco) y las subpupilas que muestrean el círculo de trabajo (en blanco).

Los parpadeos del ojo, el *speckle* o que la pupila ocular se encuentre parcialmente fuera de los bordes de la cámara aumentan la incertidumbre en la estimación del centro

de la pupila y pueden cambiar la red de muestreo usada, al causar que el pico de alguna ventana contenida en el círculo seleccionado no supere  $t_{ik}^{(k)}$ . Para evitar estos cambios, que complicarían el procesado de los datos, sólo se emplean las medidas de una realización si todas las subaperturas contenidas en el radio de pupila deseado superan el umbral de seguimiento. Este procedimiento también conlleva el descarte de realizaciones en las que tan sólo unas pocas ventanas poseen picos de irradiancia bajos.

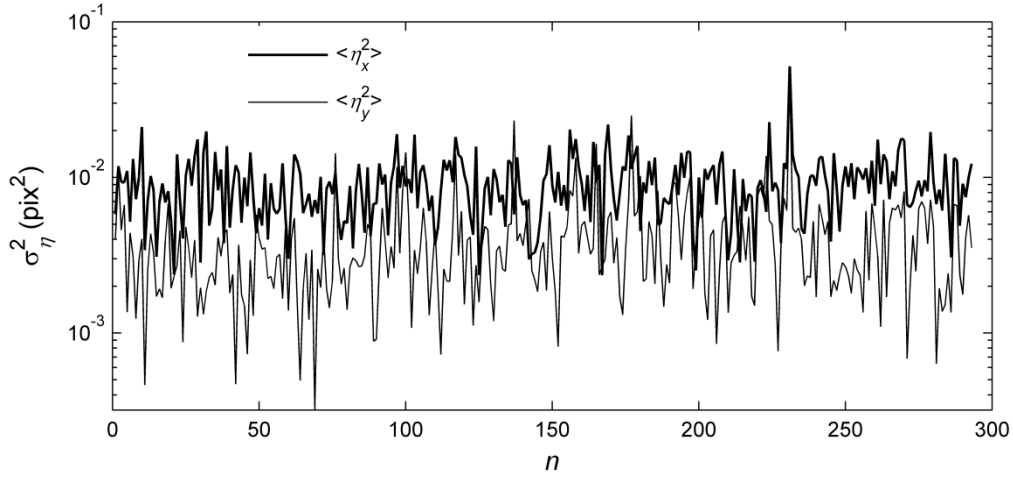
Otra modificación que ayuda a calcular e interpretar las gráficas de las magnitudes estadísticas del capítulo 5 consiste en ordenar las matrices en las que se almacenan los datos de los desplazamientos de los centroides siguiendo un criterio sencillo, como el mostrado en la figura 5.5a). En los programas originales el ordenamiento de las microlentes está determinado por el algoritmo de reconocimiento de objetos que detecta los *spots* de referencia (cf. apartado 6.2.1). Aunque las microlentes se agrupan en columnas con valores de  $x_n$  similares, cada columna no se recorre siguiendo un criterio intuitivo, pues se colocan primero las subpupilas cuyos *spots* se terminan de procesar antes. A la hora de estimar las aberraciones, este hecho es irrelevante mientras se emplee el mismo criterio para construir las filas de la matriz **B**. Para solventar esta situación, se opta por usar un criterio de ordenamiento similar al de la figura 5.5a).

Al observar las imágenes de las series de referencia, como la de la figura 6.2a), es fácil percatarse de la existencia de un pequeño ángulo de rotación entre los ejes de la matriz de microlentes (ortogonales a los lados de las mismas) y las direcciones de medida  $\{x, y\}$  de la cámara. Ajustando por mínimos cuadrados líneas rectas a las filas y columnas de posiciones de referencia, se obtuvo un valor de  $\gamma = 0.91 \pm 0.08$  deg (el error es igual a la mitad de la discrepancia obtenida usando las filas y usando las columnas). La situación descrita no se corresponde con la supuesta en buena parte del capítulo 5, en donde se considera que esta rotación es igual a cero. Para solventar este hecho, se aplicó la rotación opuesta a los vectores  $\mathbf{m}(\mathbf{r}_n)$  experimentales, a fin de trabajar con un sistema de referencia en la cámara paralelo al de la matriz de microlentes. La influencia de esta corrección en los resultados resultó ser despreciable.

### 6.3.2 Ruido

Para la estimación de los momentos estadísticos del ruido se usó una de las series temporales medidas con la onda plana de referencia. En particular, la serie usada constaba de  $K=85$  realizaciones tomadas con los mismos parámetros de la cámara que durante las medidas de las aberraciones oculares. Para ello era necesario disminuir la

potencia del láser a fin de evitar la saturación de las imágenes. Las medidas de la serie considerada estiman adecuadamente los niveles de ruido electrónico para aquellos casos en los que los *spots* se encuentren dominados por la figura de difracción de las microlentes del HS. No obstante, en esta serie no se recoge el efecto del *speckle*, por lo que es de esperar que se subestimen los niveles de ruido.



**Figura 6.6:** Varianzas de las componentes  $\eta_u(\mathbf{r}_n)$  del ruido para cada microlente  $n$  contenida en una pupila circular de radio  $R_p = 2.8$  mm. La gráfica está en escala semilogarítmica.

En la figura 6.6 se recogen las varianzas de las componentes del ruido para las microlentes contenidas en una pupila circular de radio  $R_p = 2.8$  mm situada en el centro de la matriz de microlentes. Se observan de nuevo variaciones entre los valores obtenidos en cada localización  $\mathbf{r}_n$  y para ambas componentes. Los valores medios entre microlentes de las varianzas son  $\langle \eta_x^2 \rangle = (9.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$  y  $\langle \eta_y^2 \rangle = (4.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$ . El promedio de las dos componentes es  $\sigma_\eta^2 = (6.7 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ pix}^2$ , que se corresponde con  $\sigma_\eta = (8.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-2} \text{ pix}$ . En el análisis del capítulo 7 se usará de nuevo la suposición de ruido aditivo con valor medio cero, momentos de segundo orden dados por (2.40) y el valor de la varianza que se acaba de estimar.





## Capítulo 7

# ESTADÍSTICA INDIVIDUAL Y POBLACIONAL DE LA MUESTRA PRINCIPAL DE OJOS

En este capítulo se estudia la estadística espacial individual y poblacional de las aberraciones de la principal muestra de ojos de la tesis. Para ello se usan directamente los centroides medidos con el sensor HS, sin estimar la aberración, de acuerdo con los métodos presentados en el capítulo 5. En el capítulo 6 se describió el montaje y protocolo usados para tomar las medidas del grupo principal de ojos, así como el procesamiento realizado a las imágenes capturadas por el sensor. Recordemos que en el apartado 5.5.2 ya se ilustró la aplicación de los métodos basados en los centroides. Para ello, se estudió la estadística individual de las aberraciones de dos ojos, que fueron medidos en un estudio preliminar usando un sensor diferente al del capítulo 6. Con el uso de una muestra más grande no sólo se busca profundizar en el estudio de la estadística espacial de las series temporales de ojos individuales; además, se pretende aplicar los métodos al análisis de la estadística de conjuntos de ojos.

En la sección 7.1 se presentan los resultados obtenidos al estudiar la estadística de los ojos individuales. En el apartado 7.1.1 se comentan las principales características de las 8 series temporales que se estudian con más detalle. De esas 8 series hay 4 por cada uno de los dos grupos de edad. En el apartado 7.1.2 se recogen los resultados de los ojos del grupo de menor edad (G2). Se presentan gráficas de los diagramas de dispersión, varianzas, funciones de estructura y parámetros tau de los centroides, así como ajustes de los modelos de la sección 5.4 a los datos y los resultados de diferentes pruebas estadísticas. En el apartado 7.1.3 se hace lo propio con los ojos del grupo de mediana edad (G1). Los estudios de esta sección han originado una publicación (Pailos et al.

2010). En la sección 7.2 se estudia la estadística poblacional de un conjunto de ojos del grupo G1. Tras una breve discusión acerca de las peculiaridades de la aplicación, en el apartado 7.2.1 se presentan las gráficas de las mismas magnitudes estadísticas de los centroides usadas con las series de ojos individuales, junto con los ajustes de los modelos de la sección 5.4 y los resultados de los tests estadísticos de interés. En el apartado 7.2.2 se muestran los resultados obtenidos al ajustar las predicciones para las funciones de estructura de un modelo de fluctuaciones de desenfoque y astigmatismo. En la sección 7.3 se discuten, de nuevo, los métodos del capítulo 5, su aplicación en esta tesis al caso ocular y los resultados obtenidos. En el apartado 7.3.8 se señalan diversos temas y tareas abiertos y pendientes de resolver, que podrían ser objeto de futuras investigaciones.

## 7.1 Estadística de ojos individuales

### 7.1.1 Ojos presentados

Por razones de espacio y claridad, en esta sección no se presentan los resultados de todos los ojos analizados, sino de un subconjunto de ellos. Se seleccionaron series cuyas imágenes del HS ofrecen una buena relación señal-ruido y que constan de un número alto de medidas válidas tras aplicar el seguimiento de la pupila y la eliminación de los parpadeos. Se analizaron las primeras  $K=380$  medidas válidas de cada serie.

Para el grupo joven G2 se estudian 4 ojos pertenecientes a 4 personas. Los tres primeros ojos, E1G2, E2G2 y E3G2, son ojos izquierdos, mientras que E4G2 es un ojo derecho. Los errores refractivos esféricos equivalentes de estas 4 personas son los más moderados del grupo: el rango de sus 8 ojos es de  $[-0.625, 0]$  D (recuérdese que la fijación es binocular). A partir de los coeficientes de Zernike estimados para las medidas de la serie con  $R_p=2.8$  mm y  $M=35$  modos se tiene que  $\Delta_2^{1/2}=0.483$   $\mu\text{m}$  para el ojo E1G2,  $0.569$   $\mu\text{m}$  para el E2G2,  $0.709$   $\mu\text{m}$  para el E3G2 y  $1.04$   $\mu\text{m}$  para el E4G2.

Para el grupo de mediana edad, el G1, se presentan los resultados obtenidos para otros 4 ojos. Los ojos E2G1 y E4G1 son izquierdos, mientras que E1G1 y E3G1 son derechos. Usando  $R_p=2.45$  mm y  $M=35$  modos se tiene que  $\Delta_2^{1/2}=0.539$   $\mu\text{m}$  para el ojo E1G1,  $1.12$   $\mu\text{m}$  para el E2G1,  $0.427$   $\mu\text{m}$  para el E3G1 y  $0.314$   $\mu\text{m}$  para el E4G1.

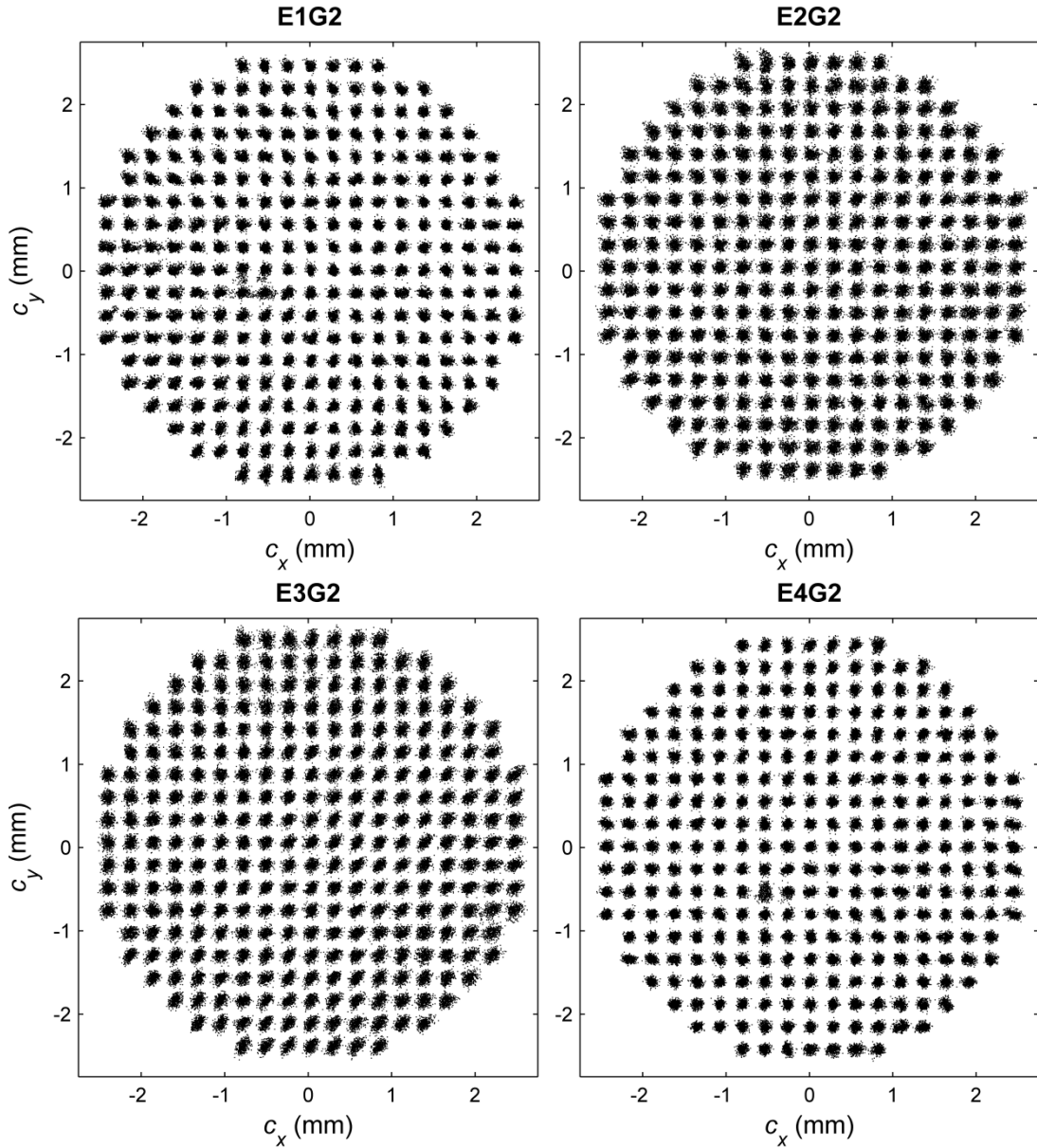
### 7.1.2 Ojos del grupo joven

#### a) Diagramas de centroides

La figura 7.1 muestra los diagramas de centroides de los 4 ojos del grupo G2. El origen de coordenadas de las gráficas es la posición de la ventana más cercana en cada medida a la posición estimada para el centro de la pupila ocular (cf. el apartado 6.3.1). En todos los ojos se usan  $K=380$  medidas. El aumento aplicado a los desplazamientos de los centroides respecto a sus valores medios es  $Q=7$  [cf. la ecuación (5.1)].

Las nubes de dispersión del ojo E4G2 son similares en forma y tamaño, lo que sugiere homogeneidad e isotropía de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ , de acuerdo con la sección 5.2. La principal excepción la constituyen las nubes de la columna de la derecha. Para el ojo E2G2 gran parte de las nubes tienen también anchos muy similares entre sí, tanto en la dirección  $x$  como en la dirección  $y$ . No obstante, algunas nubes próximas al borde izquierdo de la pupila ocular presentan una forma alargada que podría estar ligada a las fluctuaciones de desenfoque. En el ojo E1G2 también aparecen nubes alargadas cerca de los bordes izquierdo e inferior de la pupila, susceptibles de tener el mismo origen. Finalmente, para el ojo E3G2 también aparecen nubes asimétricas en la periferia, aunque la orientación de alguna de ellas no se corresponde con las predicciones del modelo de desenfoque.

En ninguno de los cuatro diagramas se percibe un grado de no homogeneidad tan grande ni una contribución tan clara de las fluctuaciones de desenfoque como para el diagrama del ojo A (figura 5.6a). Esto se debe en parte a que las fluctuaciones del ojo A son particularmente grandes, con una  $\sigma_a$  estimada a partir de los centroides de entre 0.20 y 0.25 D. Es pertinente señalar que las microlentes del patrón del capítulo 6 tienen una focal sensiblemente inferior que las del HS del estudio preliminar (8.0 mm frente a 51.8 mm; el tamaño efectivo del píxel sólo es menor en un factor 2: 11.4  $\mu\text{m}$  frente a 21.76  $\mu\text{m}$ ). Esto causa que, aunque de mayor rango dinámico, el sensor actual tenga menos sensibilidad: el mismo gradiente del frente origina un desplazamiento de los centroides menor que para la focal mayor. En consecuencia, con focales pequeñas es conveniente usar  $Q$  mayores, pero en el patrón actual el  $Q$  máximo está limitado por la alta densidad de microlentes. Además, los valores de  $\sigma_\eta$  en píxeles son similares para los dos sensores, a pesar de que en la estimación realizada para el HS del capítulo 6 no se consideró el *speckle*, que es relevante en él debido a la coherencia de su fuente. Es posible que la menor SNR del HS actual haga que los diagramas de centroides aparenten una mayor homogeneidad e isotropía, como se comentó en la sección 5.2.



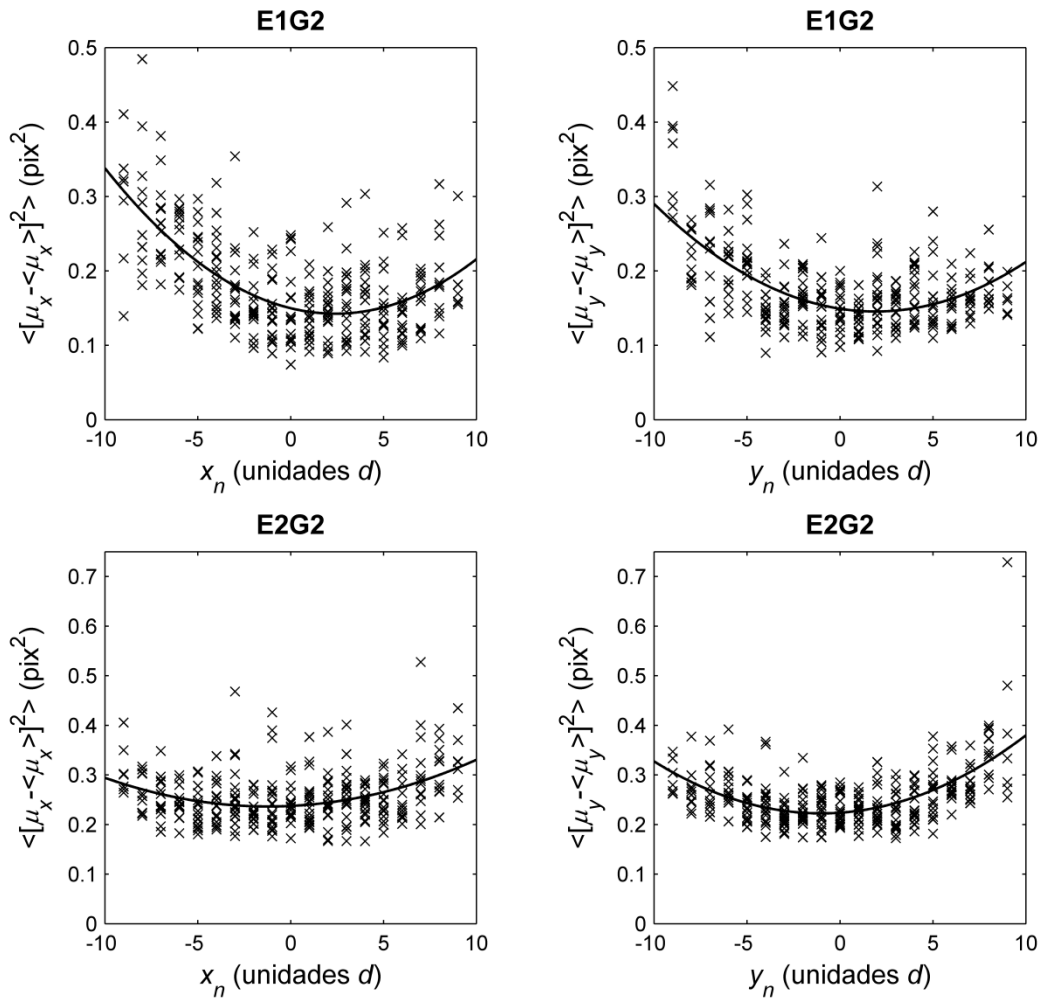
**Figura 7.1:** Diagramas de centroides de 4 ojos del grupo G2. Se usan  $K=380$  medidas por serie. Se aplica un aumento  $Q=7$  a los desplazamientos de los centroides según (5.1). Se siguió a la pupila ocular.

Los diagramas de centroides muestran de nuevo su utilidad para detectar valores atípicos. Así, para el ojo E4G2 la nube de la ventana  $n=107$  (con coordenadas aproximadas de  $[-0.5, -0.5]$  mm) es sensiblemente más dispersa que sus vecinas, lo que se corrobora al graficar las varianzas  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  en las diferentes localizaciones  $\mathbf{r}_n$  de la pupila ocular. Al inspeccionar las imágenes de la cámara, se halla que el fenómeno se debe a la presencia del reflejo corneal del haz láser. Como el plano de las microlentes y el de la pupila ocular están conjugados, la influencia del reflejo es mayor en los sistemas con microlentes de focal pequeña, como el actual. El efecto del reflejo también es visible en las ventanas  $n=90, 108$  y  $109$  de E1G2 (próximas a  $[-0.7, 0]$  mm). Debido al

elevado número  $N$  de localizaciones de pupila analizadas, en el resto de la sección se prescinde de los datos correspondientes a las regiones contaminadas por el reflejo.

*b) Varianzas de los centroides*

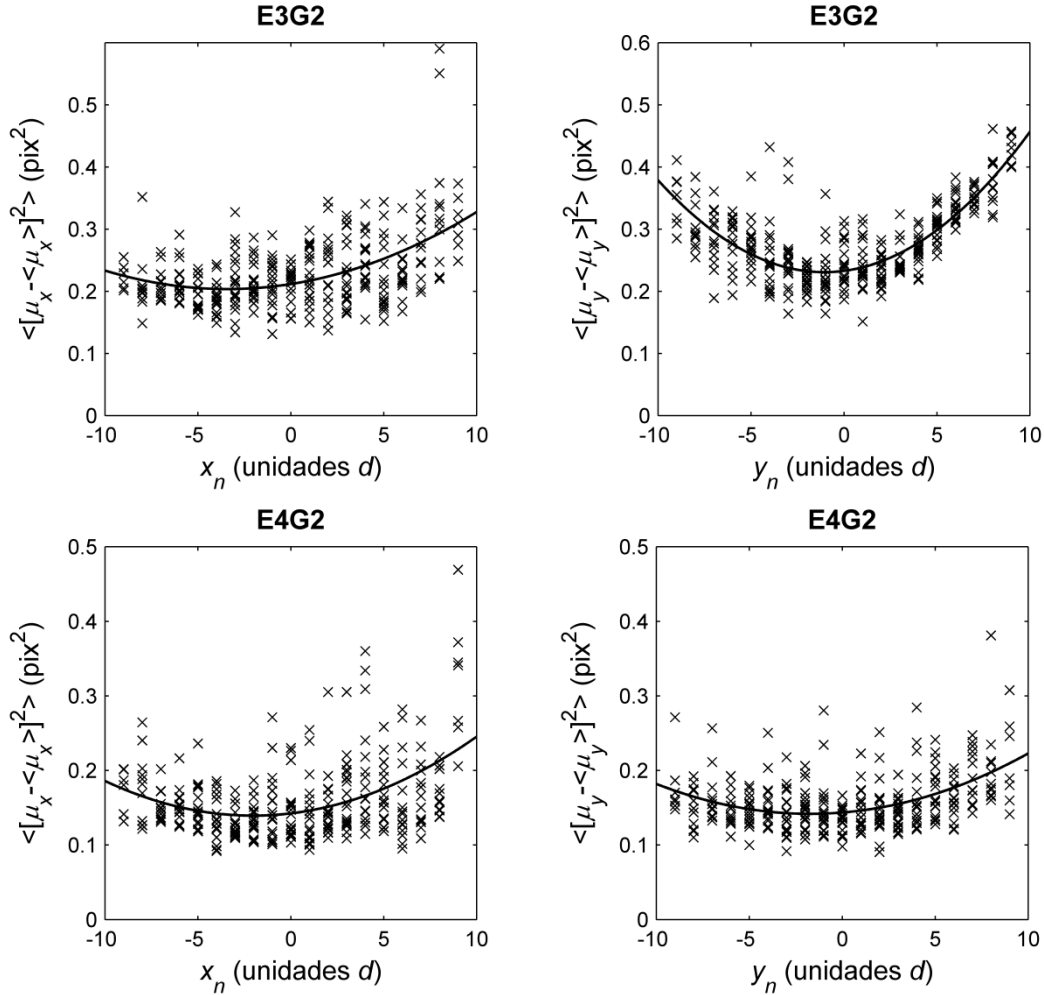
Las figuras 7.2 y 7.3 grafican las varianzas  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de 4 ojos del grupo G2, representadas con aspas, frente a las coordenadas  $x_n$  e  $y_n$  de las localizaciones de la pupila ocular consideradas. También se incluyen las parábolas correspondientes a los ajustes por mínimos cuadrados de la expresión (5.55), que es la predicción del modelo de fluctuaciones de desenfoque del apartado 5.4.2.



**Figura 7.2:** Varianzas de las componentes  $x$  e  $y$  de los centroides de los ojos E1G2 y E2G2 y parábolas resultantes del ajuste de la expresión (5.55) predicha por el modelo de fluctuaciones de desenfoque.

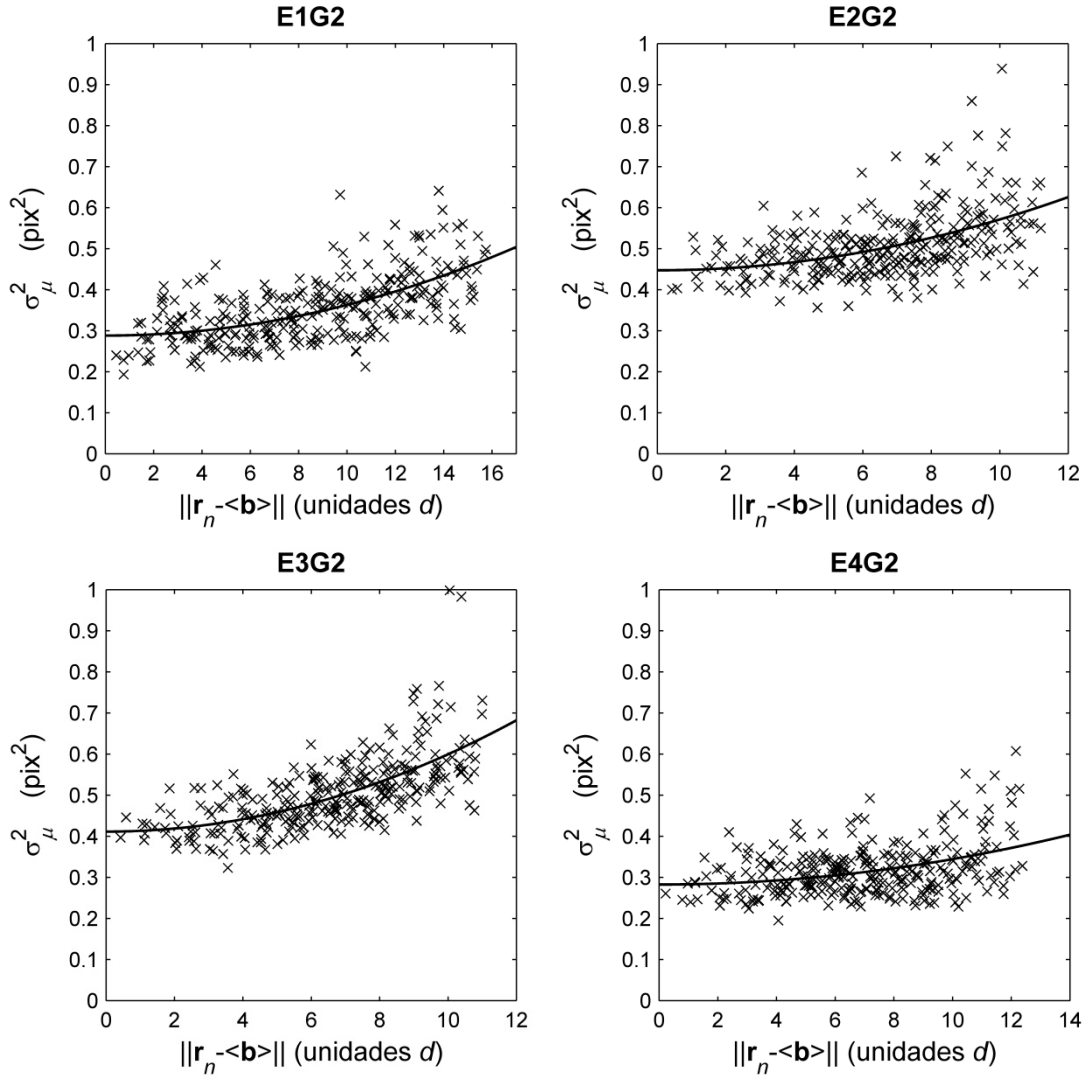
La figura 7.4 grafica la suma  $\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle = \langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de las varianzas de las dos componentes ortogonales de los centroides de los mismos ojos. También se representa la curva resultante del ajuste por mínimos cuadrados de la expresión (5.57), ligada al modelo de desenfoque. La abscisa es la distancia  $\|\mathbf{r}_n - \langle \mathbf{b} \rangle\|$  entre la

localización  $n$ -ésima en la pupila y el valor estimado del descentramiento ocular promedio. Estos descentramientos se producen en relación con las posiciones estimadas por el algoritmo de seguimiento para la pupila ocular en las distintas medidas. Los ajustes se realizaron del mismo modo que en el apartado 5.5.2. Los resultados se recogen en la tabla 7.1.



**Figura 7.3:** Varianzas de las componentes  $x$  e  $y$  de los centroides de los ojos E3G2 y E4G2 y parábolas resultantes del ajuste de la expresión (5.55) predicha por el modelo de fluctuaciones de desenfoque.

Los valores obtenidos para los coeficientes de determinación  $R^2$  de los ajustes son moderados o bajos. Esto se debe a la elevada variabilidad que se observa en las gráficas para las varianzas de los centroides entre localizaciones de la pupila ocular con las mismas coordenadas  $x_n$  o  $y_n$  o con una distancia  $\|\mathbf{r}_n - \langle \mathbf{b} \rangle\|$  similar. Los valores más altos de  $R^2$  se obtienen para los ajustes de los ojos E1G2 ( $R^2 = 0.41$  para el ajuste de la componente  $u = x$ ) y E3G2 ( $R^2 = 0.61$  para  $u = y$ , aunque el ajuste de la componente  $u = x$  es notablemente peor:  $R^2 = 0.24$ ). Los valores más bajos de  $R^2$  se producen para los ojos E2G2 ( $R^2 \leq 0.34$  para los tres ajustes) y E4G2 ( $R^2 \leq 0.20$ ).



**Figura 7.4:** Varianzas  $\sigma_\mu^2(\mathbf{r}_n) = \langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle + \langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  de los centroides de 4 ojos del grupo G2 y parábolas resultantes del ajuste de la ecuación (5.57) del modelo de fluctuaciones de desenfoque.

Ocupémonos de los valores estimados por los ajustes para la desviación típica  $\sigma_a$  del desenfoque y las coordenadas  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$  del descentramiento ocular. Para estos 4 ojos no se restringió el rango de valores que estas variables podían tomar en los ajustes. Para el ojo E1G2 los ajustes realizados usando  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$ ,  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  tienen coeficientes  $R^2$  similares: 0.41, 0.35 y 0.39, respectivamente. Respecto a  $\sigma_a$ , los valores estimados con los ajustes de las componentes  $u=x$  y  $u=y$  son ligeramente superiores al valor asociado al ajuste de la suma de varianzas,  $\sigma_a = 0.14 \pm 0.01$  D. Se obtienen estimaciones elevadas para los descentramientos oculares promedio. Así, de acuerdo con el ajuste de  $\langle \tilde{\mu}^2(\mathbf{r}_n) \rangle$ ,  $\langle b_x \rangle = 1.6 \pm 0.4$  mm y  $\langle b_y \rangle = 0.7 \pm 0.3$  mm. Los valores estimados con los ajustes de las componentes  $x$  e  $y$  son algo menores:  $\langle b_x \rangle = 0.7 \pm 0.1$  mm y  $\langle b_y \rangle = 0.5 \pm 0.1$  mm, respectivamente. Nótese que las dos estimaciones de  $\langle b_y \rangle$  son compatibles, pero no así las de  $\langle b_x \rangle$ . Si se consideran las fluctuaciones de prisma, a

partir de los coeficientes de Zernike estimados para la serie ( $M=35$ ) se obtiene que  $\delta_x = 1.5$  mm y  $\delta_y = 0.88$  mm. Estos valores reducen la magnitud de la mayoría de las estimaciones de los descentramientos promedio, aunque para los ajustes de las componentes individuales siguen siendo mayores que el espaciado entre microlentes.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$	$F_0$	$P_F$
E1G2	$x$	$0.187 \pm 0.009$	$0.7 \pm 0.1$	–	0.41	98.5	0.000
	$y$	$0.167 \pm 0.009$	–	$0.5 \pm 0.1$	0.35	77.1	0.000
	Suma <sup>3</sup>	$0.14 \pm 0.01$	$1.6 \pm 0.4$	$0.7 \pm 0.3$	0.39	61.2	0.000
E2G2	$x$	$0.14 \pm 0.01$	$-0.3 \pm 0.2$	–	0.13	21.8	0.000
	$y$	$0.189 \pm 0.008$	–	$-0.28 \pm 0.08$	0.34	74.0	0.000
	Suma	$0.18 \pm 0.01$	$-0.4 \pm 0.1$	$-0.3 \pm 0.1$	0.24	30.2	0.000
E3G2	$x$	$0.14 \pm 0.01$	$-0.9 \pm 0.3$	–	0.24	46.6	0.000
	$y$	$0.225 \pm 0.006$	–	$-0.29 \pm 0.05$	0.61	222.3	0.000
	Suma	$0.227 \pm 0.009$	$-0.43 \pm 0.09$	$0.01 \pm 0.06$	0.44	74.2	0.000
E4G2	$x$	$0.14 \pm 0.01$	$-0.6 \pm 0.2$	–	0.18	32.2	0.000
	$y$	$0.127 \pm 0.009$	–	$-0.5 \pm 0.2$	0.20	35.4	0.000
	Suma	$0.13 \pm 0.01$	$-0.8 \pm 0.3$	$-0.1 \pm 0.2$	0.15	17.0	0.000

**Tabla 7.1:** Resultados de los ajustes de las expresiones predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las varianzas de los desplazamientos de los centroides de 4 ojos del grupo G2.

En el caso del ojo E2G2 el coeficiente  $R^2$  vale 0.13, 0.34 y 0.24 para los ajustes de las varianzas de  $u=x$ , de  $u=y$  y de la suma de componentes, respectivamente. Los resultados obtenidos para la desviación típica del desenfoque también muestran diferencias. Así,  $\sigma_a = 0.14 \pm 0.01$  D para el ajuste de  $u=x$  y  $\sigma_a = 0.189 \pm 0.008$  D para el de  $u=y$ . Por otra parte, los valores estimados para  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$  por los diferentes ajustes son compatibles y su magnitud es comparable al espaciado  $L$  entre microlentes. Si se considera el efecto de las fluctuaciones de prisma, los valores de  $\delta_x = -0.17$  mm y  $\delta_y = -0.38$  mm hallados disminuyen aún más los descentramientos oculares promedio.

Para el ojo E3G2 los valores de los coeficientes de determinación  $R^2$  de cada ajuste son sensiblemente diferentes: 0.24, 0.61 y 0.44. También existen discrepancias

<sup>3</sup> Al comparar los parámetros de este ojo con los recogidos en el artículo publicado (Pailos et al. 2010) ha de tenerse presente que en el segundo caso no se prescindió de los datos afectados por el reflejo corneal.



entre las estimaciones de  $\sigma_a$ . Destaca el alto valor predicho por los ajustes de la componente  $u=y$  y de la suma de componentes:  $\cong 0.23$  D. No obstante, en el siguiente subapartado se ve que este valor es superior a los predichos por los ajustes de la función de estructura del mismo modelo. También existen pequeñas diferencias entre las estimaciones de los descentramientos oculares promedio. Se reseña el alto valor de  $\langle b_x \rangle$  obtenido con el ajuste de la varianza de la componente  $u=x$ :  $\langle b_x \rangle = -0.9 \pm 0.3$  mm. Para  $u=y$ ,  $\langle b_y \rangle = -0.29 \pm 0.05$  mm, mientras que para la suma de varianzas  $\langle b_x \rangle = -0.43 \pm 0.09$  mm y  $\langle b_y \rangle = 0.01 \pm 0.06$  mm. Estos valores no disminuyen al considerar las fluctuaciones de los prismas ya que  $\delta_x = 0.29$  mm y  $\delta_y = -1.19$  mm. La causa presumiblemente sea la contribución de las fluctuaciones de otras aberraciones.

Por último, para los ajustes del ojo E4G2 los coeficientes  $R^2$  son bajos: 0.18, 0.20 y 0.15. En este caso, los valores estimados para cada uno de los parámetros con los tres ajustes son compatibles teniendo en cuenta las incertidumbres. La desviación típica del desenfoque vale  $\sigma_a \cong 0.13$  D. Las estimaciones de  $\langle b_x \rangle$  son  $-0.6 \pm 0.2$  mm para el ajuste de la varianza de la componente  $u=x$  y  $-0.8 \pm 0.3$  mm para la suma de varianzas. Por su parte, las de  $\langle b_y \rangle$  son  $-0.5 \pm 0.2$  mm para  $u=y$  y  $-0.1 \pm 0.2$  mm para la suma de varianzas. Si se consideran las fluctuaciones de prismas, se tiene que  $\delta_x = -0.65$  mm y que  $\delta_y = -0.74$  mm. Por tanto,  $\langle b_x \rangle$  se reduce sensiblemente para los dos ajustes, mientras que  $\langle b_y \rangle$  disminuye para uno y aumenta para el otro.

Los ajustes de las figuras 7.2, 7.3 y 7.4 muestran una tendencia de las varianzas de los centroides de estos cuatro ojos a no permanecer constantes, sino a crecer con la distancia al centro de la pupila ocular. Esto sugiere cierta no homogeneidad de sus aberraciones, lo que se refleja en las formas alargadas de muchas nubes periféricas de los diagramas de la figura 7.1. Usemos una prueba de cociente de verosimilitudes para comparar estadísticamente los ajustes de las varianzas obtenidos con el modelo de desenfoque con la situación de varianza constante ligada a aberraciones homogéneas. La prueba permite comparar dos modelos si uno de ellos se puede obtener asignando valores a los parámetros del otro. Así, si  $w_1 = 0$  y  $w_2 = 0$  en la expresión (5.55) o si  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 0$  en (5.57), entonces la ecuación del modelo de desenfoque se convierte en la del caso homogéneo. Sea  $y$  el vector de los  $L$  datos de un ajuste, sea  $\bar{y} = L^{-1} \sum_{l=1}^L y_l$ ,  $R$  el número de ligaduras y  $\nu$  los grados de libertad. Si se cumplen las condiciones de Gauss-Markov, si los errores del ajuste son gaussianos y si se estudia la hipótesis de que todos los coeficientes del ajuste sean cero salvo el del término independiente, entonces la prueba consiste en calcular  $F_0 = Q_1/Q_2$ . Aquí  $Q_2$  es el

cociente entre la norma al cuadrado del vector de residuos del ajuste y  $\nu$ , mientras que  $Q_1 = [\sum_{l=1}^L (y_l - \bar{y})^2 - \nu Q_2] / (R - 1)$  (Sen y Srivastava 1990: 60 a 67). Si la hipótesis de que los coeficientes son cero es cierta,  $F_0$  sigue una distribución  $F$  con  $(R - 1)$  y  $\nu$  grados de libertad. La hipótesis se rechaza para valores elevados de  $F_0$  con un nivel de significatividad  $P_F = P(F \geq F_0)$ . La tabla 7.1 muestra que para los 4 ojos del grupo G2 estudiados se rechaza la hipótesis de que las varianzas sean constantes con el 1 % de significatividad. La dependencia cuadrática es mucho más probable.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$	$F_0$	$P$
E1G2	$x$	$0.161 \pm 0.008$	$-0.18 \pm 0.08$	—	0.30	60.0	0.000
	$y$	$0.149 \pm 0.008$	—	$-0.14 \pm 0.08$	0.26	50.4	0.000
	“Suma”	$0.13 \pm 0.01$	$0.0 \pm 0.1$	$0.1 \pm 0.1$	0.11	12.1	0.000
E2G2	$x$	$0.14 \pm 0.01$	$-0.3 \pm 0.2$	—	0.12	19.0	0.000
	$y$	$0.200 \pm 0.008$	—	$-0.12 \pm 0.06$	0.38	89.8	0.000
	“Suma”	$0.19 \pm 0.01$	$-0.3 \pm 0.1$	$-0.1 \pm 0.1$	0.25	31.7	0.000
E3G2	$x$	$0.14 \pm 0.01$	$-1.0 \pm 0.3$	—	0.29	59.3	0.000
	$y$	$0.210 \pm 0.006$	—	$-0.04 \pm 0.04$	0.50	144.2	0.000
	“Suma”	$0.224 \pm 0.008$	$-0.51 \pm 0.09$	$0.24 \pm 0.07$	0.50	96.9	0.000
E4G2	$x$	$0.124 \pm 0.009$	$-0.5 \pm 0.2$	—	0.22	40.6	0.000
	$y$	$0.149 \pm 0.008$	—	$-0.14 \pm 0.08$	0.26	50.4	0.000
	“Suma”	$0.12 \pm 0.01$	$-0.6 \pm 0.2$	$-0.2 \pm 0.2$	0.15	17.1	0.000

**Tabla 7.2:** Resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las varianzas de los desplazamientos de los centroides de 4 ojos del grupo G2 tras descontar la contribución de los prismas.

La tabla 7.2 recoge los resultados de los ajustes del modelo de desenfoque a las varianzas después de descontar las contribuciones de los prismas con el procedimiento del apartado 5.5.2, que consiste en sustraer los promedios entre microlentes de los desplazamientos de los centroides. En general, para estos cuatro ojos las predicciones de los descentramientos oculares promedio son menores en la tabla 7.2 que en la tabla 7.1. Para el ojo E1G2, descontar los prismas hace que decrezcan ligeramente las estimaciones de  $\sigma_a$ , disminuyan sensiblemente los valores de  $R^2$  y se reduzcan sustancialmente  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$ , que pasan a ser del orden de  $L/2$ . Para E2G2, los ajustes de la componente  $u = x$  producen resultados muy similares a los de la tabla 7.1. Los dos

ajustes restantes estiman ahora valores ligeramente superiores de  $\sigma_a$  con valores de  $R^2$  un poco más altos; los valores de los descentramientos también disminuyen. Para el ojo E3G2 las estimaciones de los descentramientos no disminuyen, algo que ya se había observado al usar los coeficientes de Zernike estimados para la serie. Los valores de  $\sigma_a$  y de  $R^2$  están próximos a los de la tabla 7.1. Para E4G2, de nuevo los valores estimados para  $\langle b_x \rangle$  decrecen ligeramente, mientras que  $\langle b_y \rangle$  decrece para un ajuste y crece para el otro. En este caso los cambios en  $\sigma_a$  o  $R^2$  no son muy grandes.

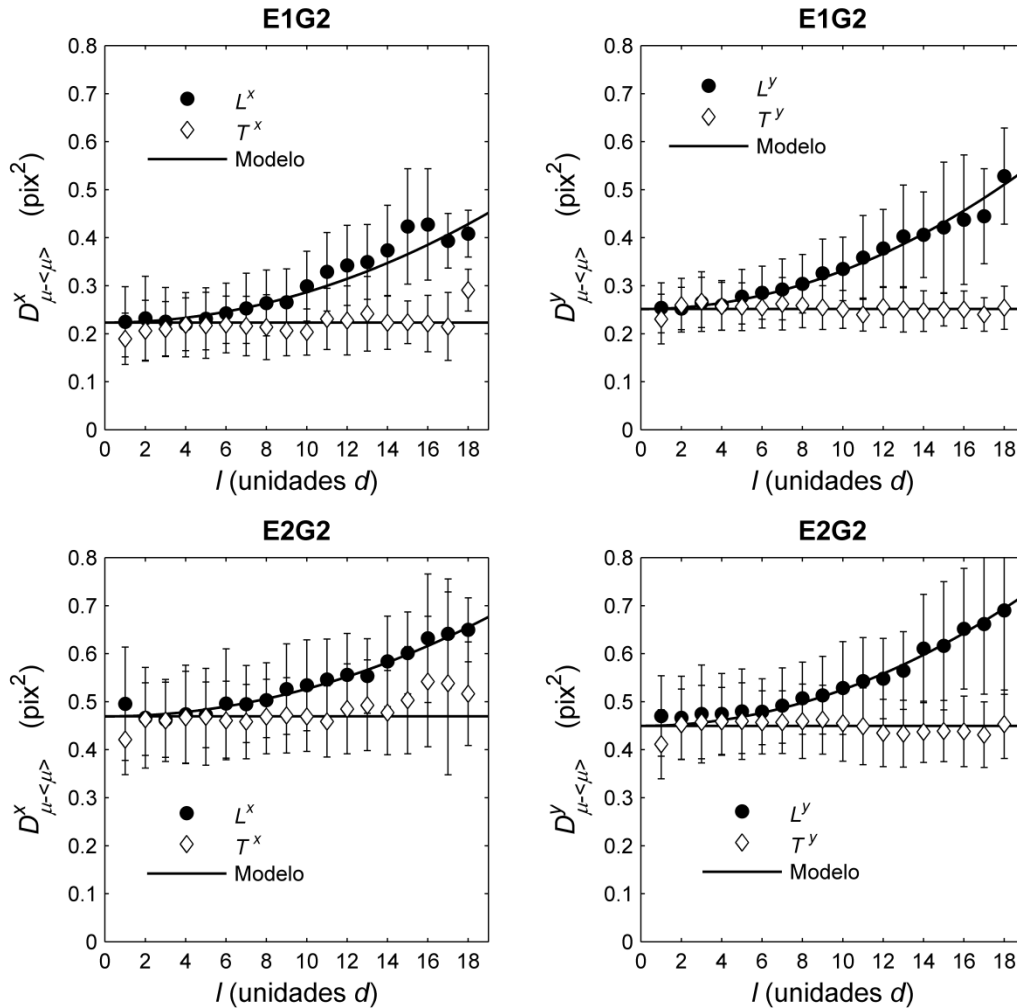
Comentemos los resultados obtenidos para las varianzas de los centroides de los 8 ojos restantes del grupo G2. Como en muchos de ellos se dispone de menos de 380 medidas válidas, los resultados reseñados se refieren a las series temporales completas (sin descontar los prismas). En comparación con los ejemplos presentados en este apartado, las varianzas del resto de los ojos o bien presentan una menor contribución de las fluctuaciones de desenfoque o bien no siguen con claridad dicho modelo. Así, sólo en 2 de los ojos el coeficiente de determinación alcanza valores moderados para los tres ajustes ( $R^2 \geq 0.10$ ) y sólo en 1 ojo las predicciones para  $\sigma_a$  superan las 0.1 D en los tres ajustes. En varios ojos  $R^2$  y  $\sigma_a$  son muy dispares para los ajustes de las varianzas de cada componente de los centroides. Para los 4 ojos con mayor error refractivo se obtienen ajustes particularmente malos. En relación con la prueba del cociente de verosimilitudes, existen 4 ojos en los que en alguno de sus ajustes no se puede rechazar la hipótesis de varianzas constantes ( $P_F > 0.05$ ). Además, en 6 de los 8 ojos los ajustes ofrecen parámetros sin sentido para el modelo, como  $\sigma_a^2 < 0$  o valores de  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$  muy grandes, lo que hace necesario utilizar mínimos cuadrados restringidos.

La sencillez del modelo de fluctuaciones de desenfoque hace que sea insuficiente para describir toda la fenomenología que se produce en las gráficas de las varianzas de nuestra muestra de ojos de personas jóvenes. En algunos ojos el modelo predice satisfactoriamente la evolución de las varianzas de los centroides con la posición en la pupila ocular, mientras que en otros ojos no lo hace. Con frecuencia es necesario recurrir a las fluctuaciones de otros modos para explicar los resultados obtenidos, como sucede con los prismas y las posiciones de los mínimos de las parábolas ajustadas.

### c) Funciones de estructura

Las figuras 7.5 y 7.6 grafican las funciones de estructura de las dos componentes  $\tilde{\mu}_u(\mathbf{r}_n)$  de los desplazamientos de los centroides de 4 ojos del grupo G2. La abscisa de las gráficas es la separación  $l$  entre cada par de microlentes normalizada por el lado  $d$  de

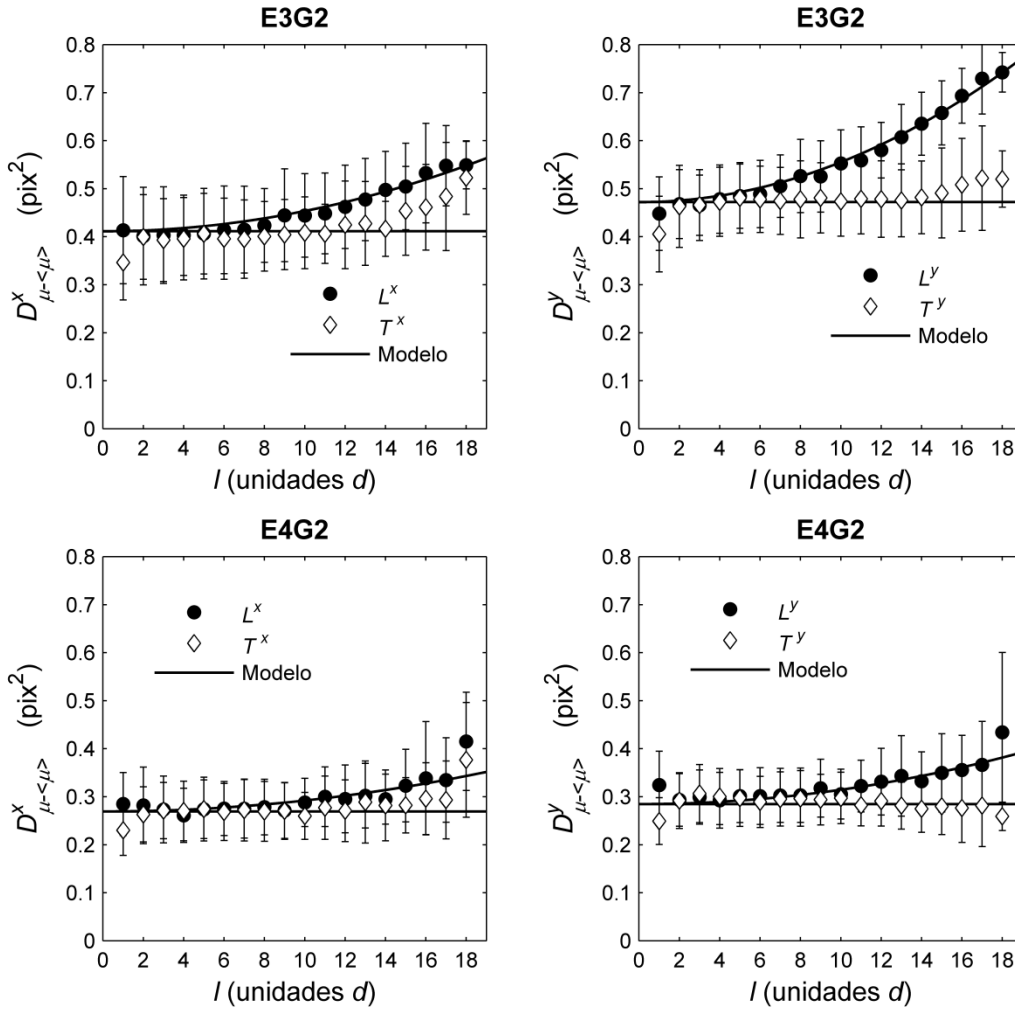
las mismas. Las LSSF se representan con círculos negros y las TSSF con rombos blancos. Como en el apartado 5.5.2, se grafican los valores medios de todos los pares de microlentes separados por el mismo vector, mientras que las barras de error son las desviaciones típicas entre los pares. Con la salvedad de los datos del ojo E4G2 y de la componente  $u = x$  del E3G2, en el resto de casos representados las LSSF experimentales crecen con  $l$ , mientras que las TSSF permanecen constantes.



**Figura 7.5:** LSSF (círculos) y TSSF (rombos) de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los ojos E1G2 y E2G2. La abscisa  $l$  es la distancia normalizada entre cada par de microlentes. Las líneas continuas son ajustes por mínimos cuadrados ponderados del modelo de fluctuaciones de desenfoque.

En las figuras se representan también las curvas resultantes del ajuste por mínimos cuadrados ponderados de las expresiones (5.58) predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Se realiza un único ajuste por componente  $u$  usando los datos y expresiones de la LSSF y de la TSSF. De nuevo es necesario incluir una constante  $q_2$  distinta de cero, que toma valores muy importantes. Su presencia puede obedecer a las causas comentadas en el apartado 5.5.2: subestimación de las varianzas

del ruido, uso de un modelo inadecuado de ruido o contribución de las aberraciones de alto orden. Además, en las imágenes obtenidas con este sensor para ojos reales aparece claramente *speckle*, fenómeno ausente en la serie usada para cuantificar el ruido.



**Figura 7.6:** LSSF (círculos) y TSSF (rombos) de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los ojos E3G2 y E4G2. La abscisa  $l$  es la distancia normalizada entre cada par de microlentes. Las líneas continuas son ajustes por mínimos cuadrados ponderados del modelo de fluctuaciones de desenfoque.

La tabla 7.3 recoge los resultados de los ajustes de las predicciones del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las funciones de estructura. Comentemos las estimaciones de la desviación típica  $\sigma_a$  del desenfoque. Para cada ojo se obtienen dos valores, cada uno ligado al ajuste de una componente  $u$ . Para los casos de la tabla, los dos valores de cada ojo son compatibles teniendo en cuenta sus incertidumbres. Las estimaciones son menores o iguales que los valores de  $\sigma_a$  obtenidos con los ajustes de las varianzas de los centroides (cf. las tablas 7.1 y 7.2). Por ejemplo, mientras que con el ajuste de la varianza de la componente  $y$  del ojo E3G2 se obtuvo una estimación de  $0.225 \pm 0.006$  D, con las funciones de estructura se llega a  $0.15 \pm 0.01$  D. Las

estimaciones de los tres primeros ojos son mayores que 0.10 D. Como referencia, las desviaciones típicas del coeficiente de desenfoque obtenidas al ajustar los gradientes de  $M=35$  polinomios de Zernike a los centroides de cada serie (con  $R_p=2.8$  mm) son: 0.14 D para E1G2, 0.11 D para E2G2, 0.11 D para E3G2 y 0.04 D para E4G2.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\Gamma$ (mm)	$\chi^2_\nu$	$P$
E1G2	$x^4$	$0.13 \pm 0.01$	$5.1 \pm 0.6$	0.13	1.000
	$y$	$0.15 \pm 0.01$	$4.8 \pm 0.6$	0.03	1.000
E2G2	$x$	$0.13 \pm 0.02$	$7.8 \pm 1.2$	0.04	1.000
	$y$	$0.14 \pm 0.02$	$7 \pm 1$	0.03	1.000
E3G2	$x$	$0.11 \pm 0.02$	$8 \pm 1$	0.13	1.000
	$y$	$0.15 \pm 0.01$	$6.5 \pm 0.5$	0.07	1.000
E4G2	$x$	$0.08 \pm 0.02$	$9 \pm 3$	0.08	1.000
	$y$	$0.09 \pm 0.02$	$8 \pm 2$	0.07	1.000

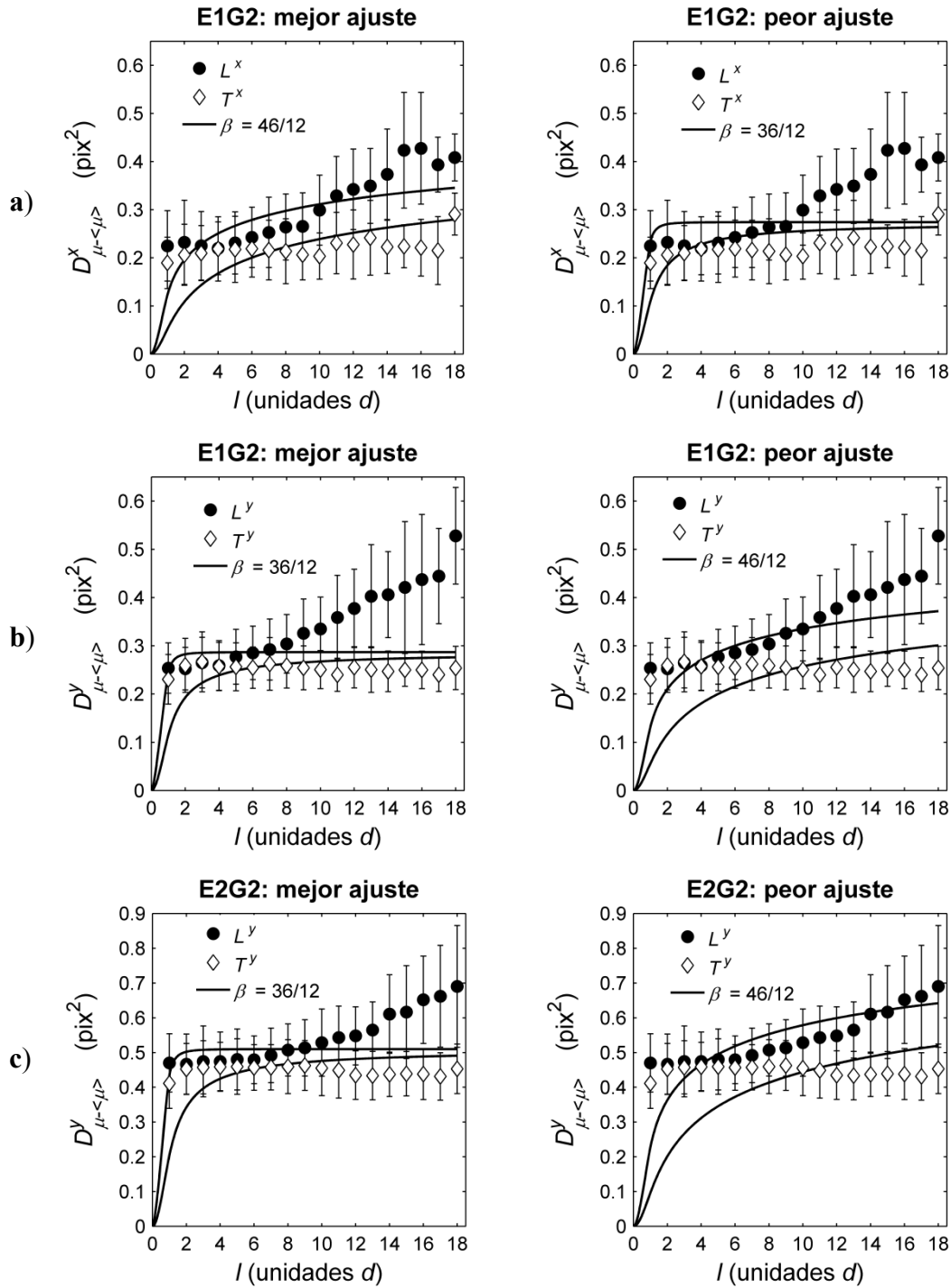
**Tabla 7.3:** Resultados del ajuste de las expresiones (5.58) del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las LSSF y TSSF de cada componente  $u=\{x, y\}$  de 4 ojos del grupo G2. Aquí,  $\chi^2_\nu = \chi^2_0/\nu$ .

Por lo que respecta a la prueba de chi cuadrado, esta es no significativa para los cuatro ojos. De hecho,  $\chi^2_\nu \ll 1$ , lo que es síntoma de no significatividad. Esto se debe no sólo a que el modelo propuesto sea apropiado, sino también a las elevadas varianzas de los datos. Por ejemplo, en la figura 7.6 se observa que la TSSF de la componente  $x$  del ojo E3G2 crece para altas separaciones  $l$ . Sin embargo, este comportamiento no repercute en el resultado de la prueba. Es conveniente recordar que estos valores de  $P$  tan altos se obtienen gracias a la modificación introducida al modelo de partida: la inclusión de la constante  $q_2$  en los ajustes.

Estudiemos la compatibilidad de las leyes de potencias con la estadística de los 4 ojos considerados del grupo G2. En la figura 7.7 se muestran algunos de los resultados obtenidos al ajustar por mínimos cuadrados ponderados las expresiones (5.32) a los datos de las SSF de los ojos E1G2 y E2G2. Recuérdese que para cada ley de potencias de exponente  $\beta$  el único parámetro a determinar es un factor multiplicativo y que se hace un solo ajuste por componente usando la LSSF y la TSSF. En la figura se

<sup>4</sup> Al comparar estos resultados con los del artículo (Pailos et al. 2010) ha de tenerse presente que en el segundo caso ni se prescindió de los datos afectados por el reflejo corneal ni se usaron mínimos cuadrados ponderados.

representan las curvas de los modelos que proporcionan el mejor y el peor ajuste en términos de  $\chi_0^2$  dentro el conjunto  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .



**Figura 7.7:** Ajustes por mínimos cuadrados ponderados de leyes de potencias a las LSSF y TSSF de las componentes: a)  $u=x$  de E1G2, b)  $u=y$  de E1G2 y c)  $u=y$  de E2G2. Para cada componente se grafica el mejor y el peor ajuste en términos de  $\chi_0^2$  de los modelos con  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .

Por simplicidad sólo consideramos leyes con  $\beta \geq 3$ , aunque según el apartado 5.4.1 se podría usar  $\beta > 2$ . Para  $\beta < 3$  los parámetros tau son más próximos a la unidad

para  $l$  bajo, un comportamiento más cercano al experimental en algunos ojos (cf. el subapartado 7.1.3d). No obstante, la LSSF se comporta de forma distinta a la observada en los ojos, con un pico para  $l$  bajo y un decaimiento posterior a un nivel de saturación.

Los resultados de la prueba de chi cuadrado para los 4 ojos y los 4 exponentes seleccionados se recogen en la tabla 7.4. En la mayoría de los casos tampoco hay significatividad para este modelo, aunque los valores de  $P$  no son tan elevados como con el modelo de desenfoque. Para el exponente  $\beta=46/12$ , hay significatividad para las dos componentes del ojo E2G2 (al 5 % para  $u=x$  y al 1 % para  $u=y$ ) y para la componente  $u=y$  de los ojos E3G2 (al 1%) y E4G2 (al 5%). Para Kolmogorov,  $\beta=44/12$ , habría que usar un nivel del 10 % para hablar de significatividad en las pruebas de la componente  $u=y$  de E2G2 y E3G2. Para  $\beta=36/12$ , hay significatividad al 5 % para la componente  $u=y$  de E3G2. Para  $\beta=40/12$  no hay significatividad en los 4 ojos.

		E1G2		E2G2		E3G2		E4G2	
$u$	$\beta$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$
$x$	36/12	0.83	0.746	0.56	0.983	0.42	0.999	0.30	1.000
	40/12	0.74	0.868	0.72	0.887	0.50	0.994	0.48	0.996
	44/12	0.66	0.936	1.1	0.287	0.75	0.853	0.85	0.714
	46/12	0.66	0.938	1.5	0.033	1.0	0.438	1.1	0.263
$y$	36/12	0.81	0.781	0.63	0.958	1.5	0.032	0.45	0.998
	40/12	0.88	0.665	0.88	0.669	1.3	0.120	0.71	0.896
	44/12	1.1	0.320	1.4	0.052	1.4	0.077	1.2	0.185
	46/12	1.3	0.116	1.8	0.002	1.6	0.010	1.6	0.015

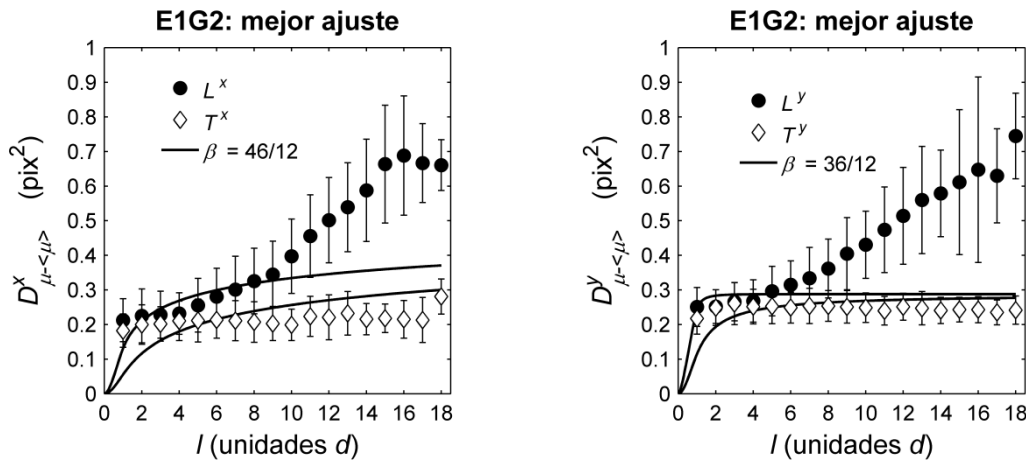
**Tabla 7.4:** Resultados de los ajustes de las expresiones (5.32), predichas por modelos de ley de potencias de exponente  $\beta$ , a los datos de la LSSF y de la TSSF para cada componente  $u$  de 4 ojos del grupo G2.

Comentemos los ajustes del ojo E1G2, recogidos en la figura 7.7a) y b). Para la componente  $x$  el mejor ajuste se produce para el mayor exponente,  $\beta=46/12$ , y el peor para el exponente más bajo,  $\beta=36/12$ . Esto se debe al crecimiento que experimentan los datos de la LSSF con  $l$  y al valor relativamente pequeño de sus desviaciones típicas para  $l$  alto. Para la componente  $y$ , a pesar de que la LSSF experimental crece con  $l$  de forma similar a la LSSF de la componente  $x$ , sucede lo contrario: el mejor ajuste se produce para  $\beta=36/12$  y el peor para  $\beta=46/12$ . La causa reside en el comportamiento



de la TSSF para bajas separaciones  $l$ : al contrario de lo que predicen los modelos, se mantiene a un valor constante, lo que perjudica más a los altos exponentes. Las altas varianzas de los datos hacen que ninguno de los ajustes de esta serie sea significativo.

En la figura 7.7c) se presentan el mejor y el peor ajuste obtenidos para la componente  $u=y$  del ojo E2G2. El comportamiento es similar al de la componente  $y$  de E1G2: mejores ajustes cuanto menores son los exponentes. La tabla 7.4 muestra que esa tendencia se cumple en la mayoría de los casos en los 4 ojos considerados. El peor ajuste de la componente  $y$  de E2G2, ligado a  $\beta=46/12$ , es significativo al 1 %. De ello es responsable la TSSF para  $l$  bajos, que se mantiene constante en lugar de decaer.



**Figura 7.8:** Ajustes por mínimos cuadrados ponderados de modelos de ley de potencias a las LSSF y TSSF de las componentes  $u=\{x, y\}$  de la serie completa del ojo E1G2 ( $K=518$ ). Para cada componente se grafica el ajuste con menor  $\chi_0^2$  de los modelos con exponentes  $\beta=\{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .

La figura 7.8 muestra un ejemplo de una serie en la que hay significatividad en los ajustes de las 4 leyes de potencias con  $\beta=\{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ . Se trata de la serie completa del ojo E1G2, con  $K=518$  medidas. Los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las LSSF y TSSF predicen que  $\sigma_a = 0.21 \pm 0.01$  D. Este valor es sensiblemente mayor al estimado con las primeras 380 medidas de la serie, lo que indica que en la parte final de la serie se producen fluctuaciones más fuertes del desenfoque. En la figura se representan las curvas de los modelos con mejores ajustes en términos de  $\chi_0^2$ . Para la componente  $x$ , el modelo  $\beta=46/12$  tiene un  $\chi_v^2=1.79$  y  $P=0.003$ ; para la componente  $y$  el modelo  $\beta=36/12$  tiene un  $\chi_v^2=1.58$  y  $P=0.015$ . Por tanto, para esta serie todos los ajustes de las dos componentes son significativos al 5 %.

Comentemos los resultados obtenidos para las funciones de estructura de los 8 ojos restantes del grupo G2. Las pruebas de chi cuadrado de los ajustes del modelo de

desenfoque son no significativas en las series temporales completas de 7 de los 8 ojos. Las grandes varianzas de los datos hacen que sólo un ajuste sea significativo, al 1 %. Tampoco hay significatividad en los casos en los que los valores estimados para  $\sigma_a$  son bajos. En ellos, de manera similar a lo que sucede en el ojo E4G2 en la figura 7.6, la TSSF permanece aproximadamente constante y la LSSF crece muy ligeramente. Sólo en uno de los ojos las estimaciones de  $\sigma_a$  con las dos componentes superan las 0.1 D. En 3 de los ojos con mayor error refractivo el valor predicho para  $\sigma_a^2$  en el ajuste de una de las componentes es negativo. Tras aplicar un ajuste por mínimos cuadrados restringidos, esta vez sin ponderar, se obtienen estimaciones de  $\sigma_a = 0.0$  D en los tres casos.

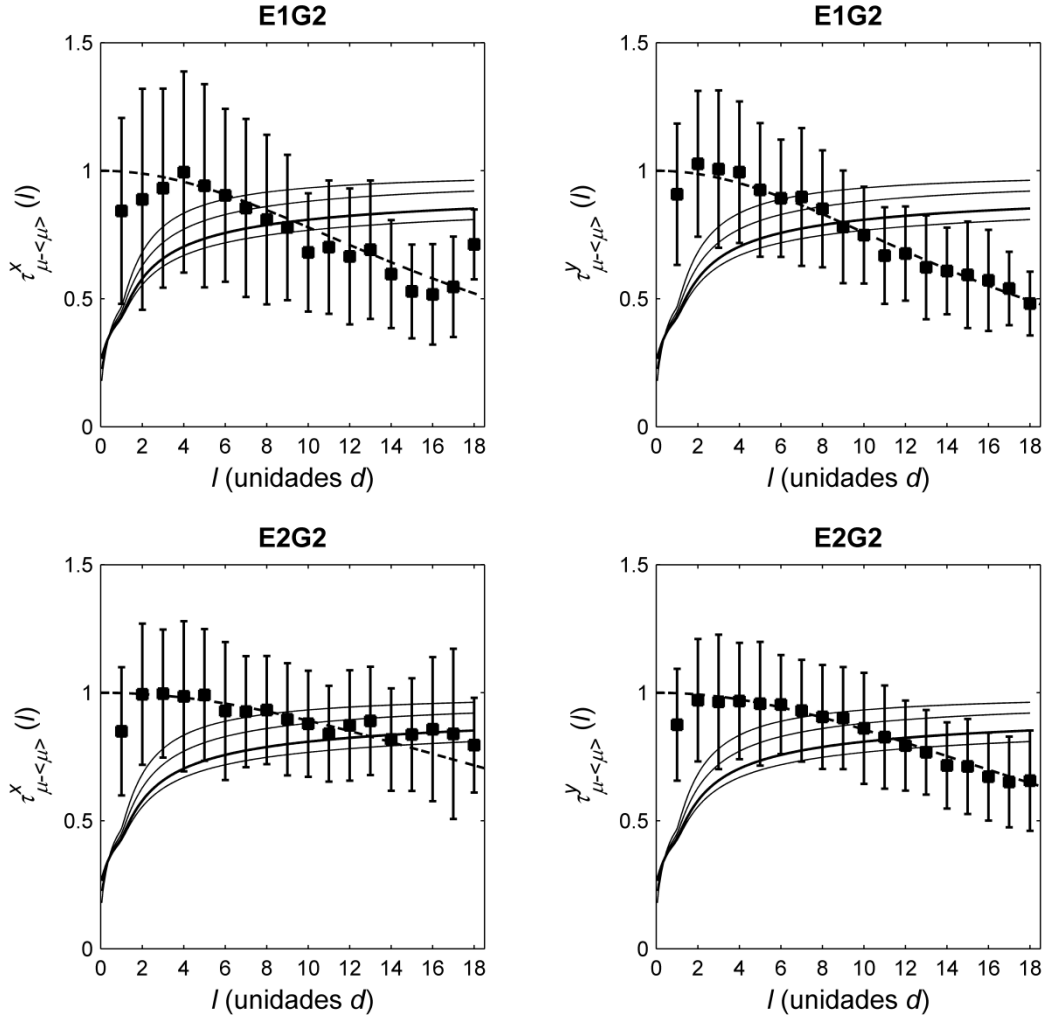
En relación con las pruebas de chi cuadrado de los ajustes de los modelos de ley de potencias, para 4 de los 8 ojos son no significativas para todas las componentes y los 4 exponentes. Sólo en uno de los ojos la prueba es significativa al 5 % para los 4 exponentes en una de las componentes de los centroides; sucede para el ojo con alto error refractivo para el que también hay significatividad con el modelo de desenfoque. En los tres ojos restantes, hay significatividad con algunos exponentes ( $\beta = 44/12$  y  $46/12$ ) y no la hay con otros. Los valores de  $P$  obtenidos son, en general, menores que los correspondientes al modelo de desenfoque. Además, con la excepción de la componente  $u = y$  de uno de los ojos, en los restantes casos los mejores ajustes se vuelven a producir para los exponentes más bajos.

#### d) Parámetros tau

Las figuras 7.9 y 7.10 grafican los parámetros  $\tau_{\mu}^u(l)$  de 4 ojos del grupo G2. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de fluctuaciones de desenfoque; se obtienen usando los parámetros  $q_1$  y  $q_2$  estimados con los ajustes de las funciones de estructura. Las líneas continuas se corresponden con las leyes de potencias  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ . No se necesitan ajustes para obtenerlas ya que están definidas por  $\beta$ .

En los cuatro ojos representados las curvas del modelo de desenfoque se corresponden mejor con los datos que las ligadas a las leyes de potencias. Para bajos valores de  $l$ , los parámetros tau experimentales son próximos a la unidad, es decir, la LSSF y la TSSF son muy similares, tal y como se observa en las gráficas del subapartado anterior. Para valores altos de  $l$ , los parámetros tau experimentales decaen en general, un comportamiento que es especialmente claro en E1G2 y que se contrapone al crecimiento de las leyes de potencias. Para otros casos, como las componentes  $u = x$

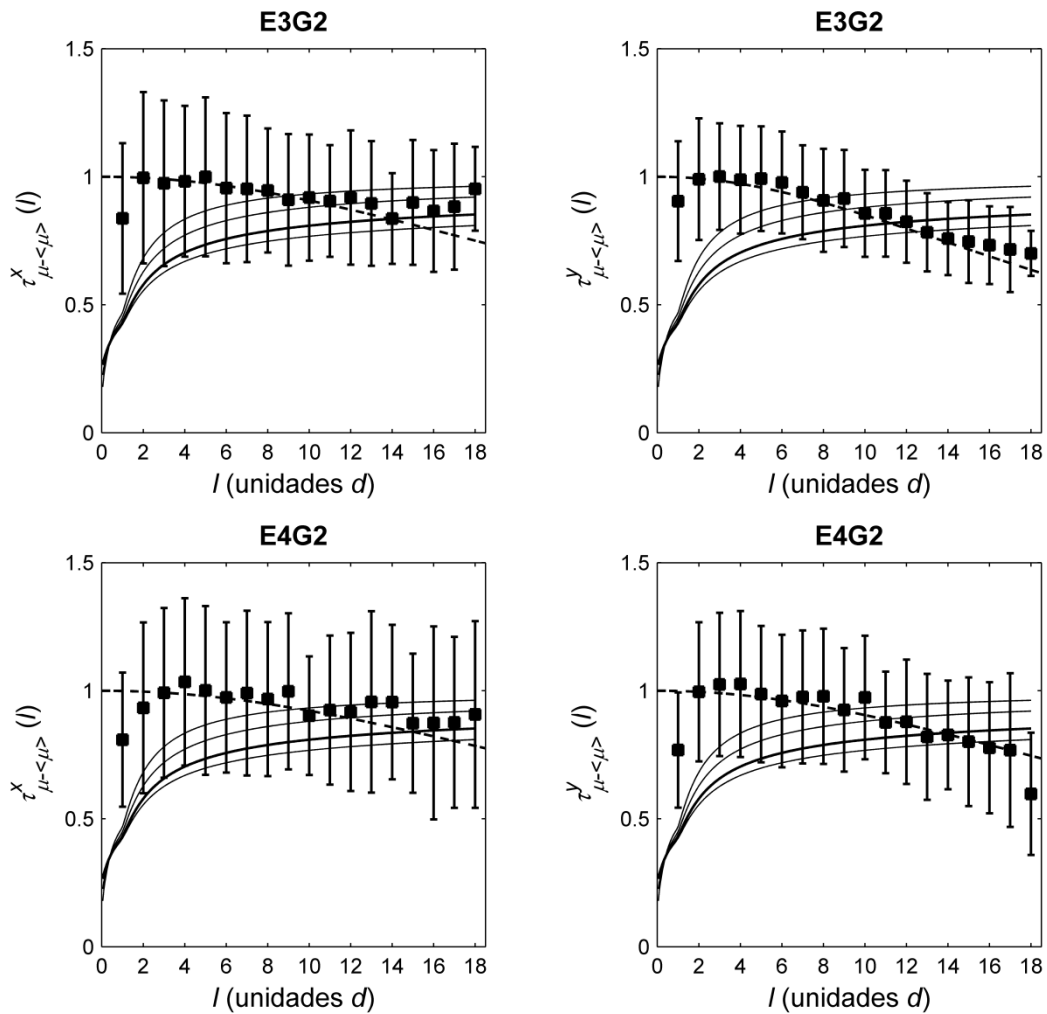
de E2G2, E3G2 y E4G2, el decaimiento es menor, y aunque es compatible con la predicción del modelo de fluctuaciones de desenfoque, las altas desviaciones típicas de los datos hacen que también lo pueda ser en este rango con las leyes de potencias.



**Figura 7.9:** Parámetro tau de las componentes  $u = \{x, y\}$  de E1G2 y E2G2. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque con los parámetros de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12$  (de mayor espesor) y  $46/12$ .

El parámetro  $\Gamma = d\sqrt{q_2/q_1}$  da la semianchura a media altura de las lorentzianas del modelo de desenfoque. Esta magnitud está tabulada en mm en la tabla 7.3 para los cuatro ojos del grupo G2 y en la tabla 5.3 para los ojos A y B. Fijémonos en los resultados obtenidos para el ojo B en el apartado 5.5.2. El ajuste del modelo de desenfoque a los datos de las funciones de estructura de la componente  $x$  de los centroides predice unos valores de  $\sigma_a = 0.083 \pm 0.007$  D y  $\Gamma = 1.6 \pm 0.2$  mm; las estimaciones con la componente  $y$  son similares. En contraposición, aunque para los ojos E1G2, E2G2 y E3G2 el modelo predice fluctuaciones mayores del desenfoque, los

valores de  $\Gamma$  de estos ojos son notablemente mayores, superiores a 5 mm. Así, en la figura 5.15b) los valores experimentales del parámetro tau y las predicciones del modelo de desenfoque son sensiblemente más bajos que las predicciones teóricas de las leyes de potencias. Esto no sucede en las figuras 7.9 y 7.10, a pesar de que en ellas se considera una pupila más grande (lo que favorece el decrecimiento de la expresión del modelo de desenfoque) y las microlentes más pequeñas hacen que el valor máximo de  $l$  sea mayor (lo que favorece el crecimiento de las expresiones de las leyes de potencias). En consecuencia, esta diferencia de comportamiento se debe a los diferentes valores estimados para la constante  $q_2$  del ajuste de (5.58).



**Figura 7.10:** Parámetro tau de las componentes  $u = \{x, y\}$  de E3G2 y E4G2. Las curvas a rayas son las lorentzianas del modelo de desenfoque con los parámetros de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12$  (de mayor espesor) y  $46/12$ .

En el subapartado anterior se recordaron las posibles causas que hacen que la constante  $q_2$  sea distinta de cero, valor a esperar si sólo hay fluctuaciones de desenfoque. Es posible que en la estadística del ojo B haya una menor contribución de las

fluctuaciones de las aberraciones de alto orden al valor de  $q_2$ . Otra opción es que la diferencia se deba a la no consideración del *speckle* al cuantificar el ruido. La fuente empleada en el sensor usado en Londres es mucho más coherente que la de Santiago, por lo que los ojos medidos en la primera localización se ven más afectados por este factor, que originaría un  $q_2$  mayor.

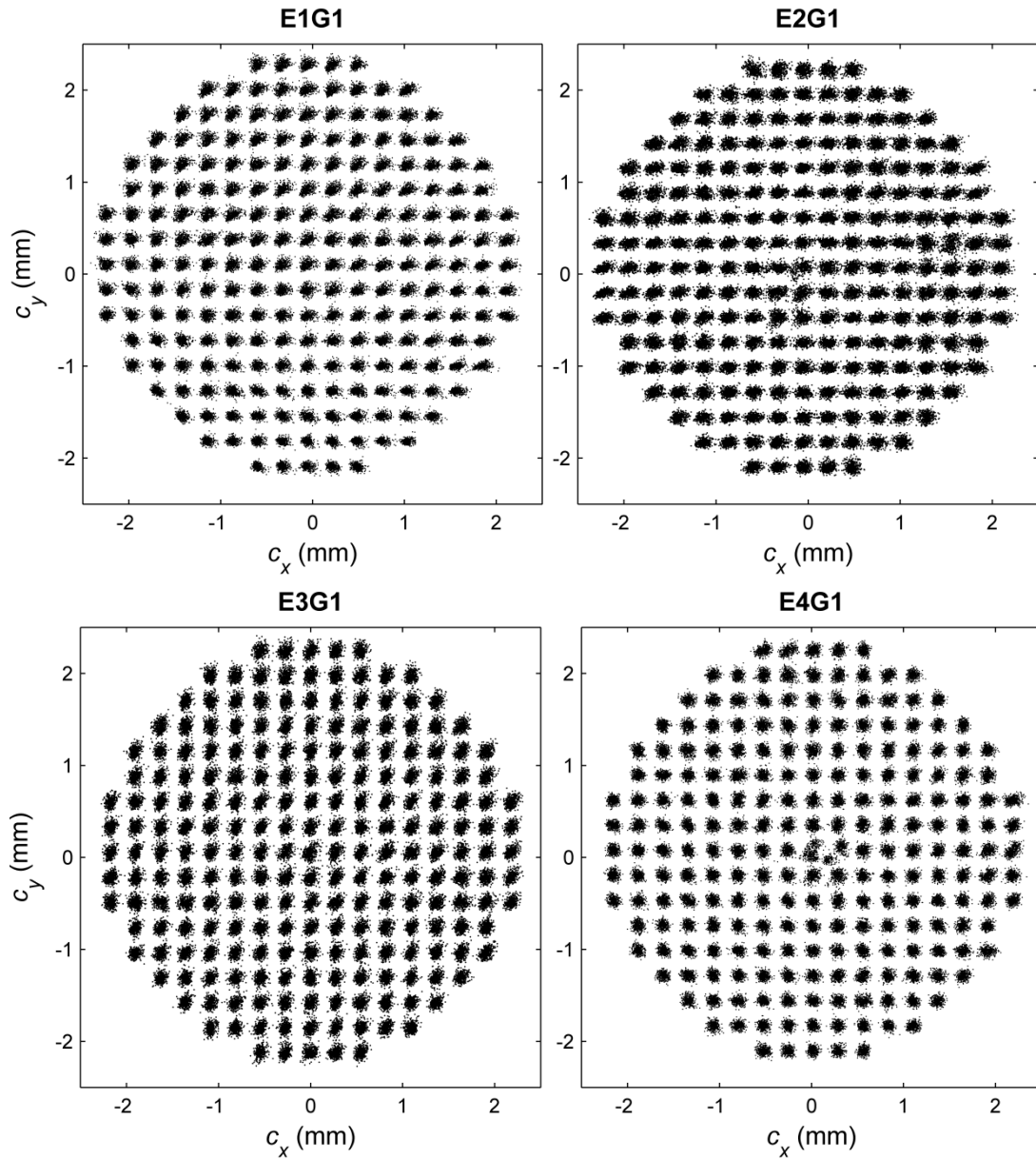
### 7.1.3 Ojos del grupo de mediana edad

#### a) Diagramas de centroides

En la figura 7.11 se muestran los diagramas de centroides de 4 ojos del grupo G1. De nuevo, se usa un aumento de  $Q=7$  y las primeras  $K=380$  medidas de cada serie temporal. La pupila considerada en este grupo G1, con  $R_p=2.45$  mm, es menor que la usada en el grupo G2, con  $R_p=2.80$  mm.

Las nubes de centroides de los ojos E3G1 y E4G1 tienen formas y dispersiones en las direcciones  $u=\{x, y\}$  similares. Además, las subpupilas más periféricas no presentan formas alongadas que sugieran la presencia de fluctuaciones de desenfoque. En consecuencia, los diagramas muestran indicios de homogeneidad e isotropía de las aberraciones de esos dos ojos, algo que se deberá confirmar o no con el estudio de las diferentes magnitudes estadísticas de los centroides. El diagrama del ojo E2G1 muestra una situación distinta. En este caso las nubes son claramente más anchas en la dirección  $u=x$  que para  $u=y$ , lo que se confirma al comparar los valores de  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$ . De acuerdo con la proposición iii de la sección 5.2, esto es indicativo de la no isotropía de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ . Además se observa cierto incremento de la anchura de las nubes en la dirección  $x$  cerca de los bordes izquierdo y derecho de la pupila considerada que, de confirmarse, indicaría que la aberración también es no homogénea. En consecuencia, la estadística de este ojo muestra un menor grado de homogeneidad e isotropía que la de E3G1 y E4G1. El ojo E1G1 presenta un caso menos claro. Aunque la forma de las nubes no varía tan acusadamente como en ojos tales como el E1G2, sí que se observa un cierto grado de no homogeneidad que no parece atribuible a la mera fluctuación del desenfoque.

En el ojo E4G1 se observa claramente el efecto del reflejo de la córnea en las nubes de las regiones  $n=111$  (la ventana central) y 128 de la pupila ocular, que origina dos picos en las gráficas de las varianzas. La inspección de las imágenes del HS confirma estas observaciones. El reflejo no es tan fácil de detectar en todos los ojos.

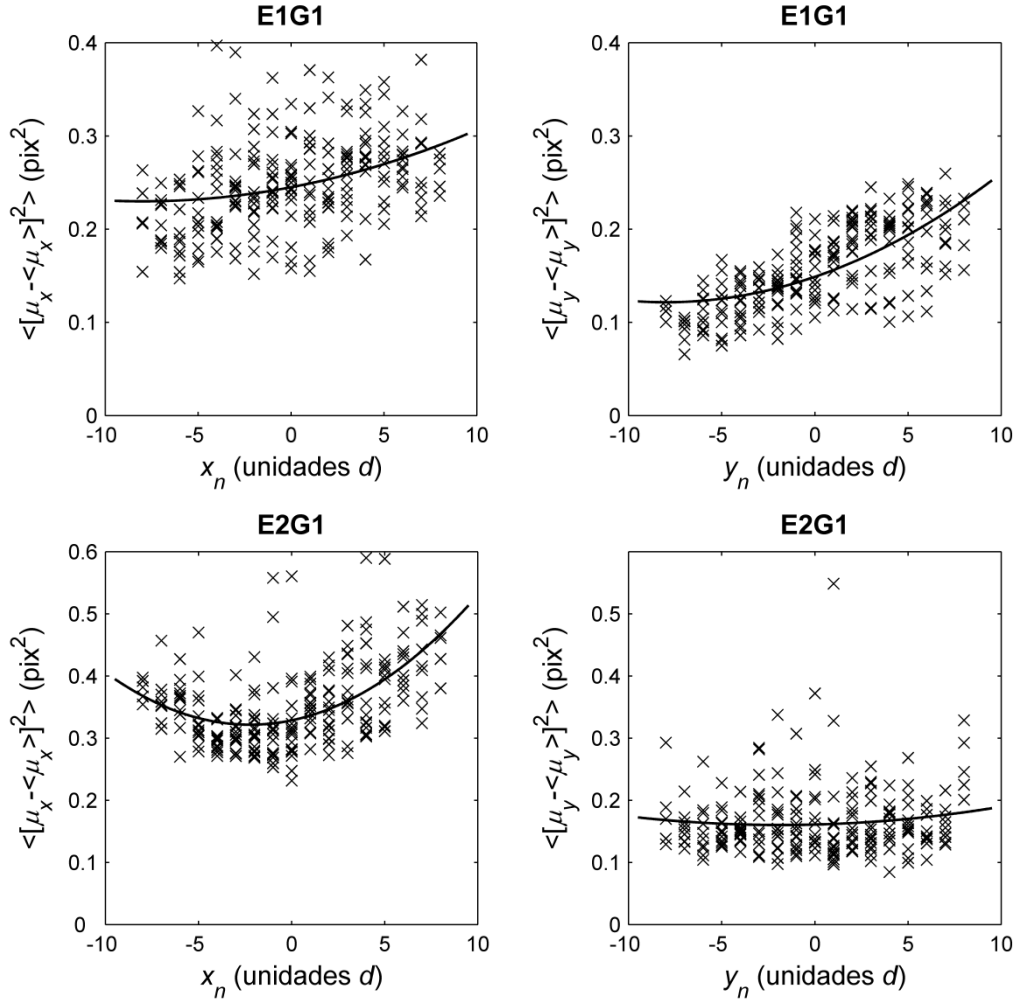


**Figura 7.11:** Diagramas de centroides de 4 ojos del grupo G1. Se usan  $K=380$  medidas por serie y un aumento de  $Q=7$  en todos los diagramas. Se siguió a la pupila ocular.

*b) Varianzas de los centroides*

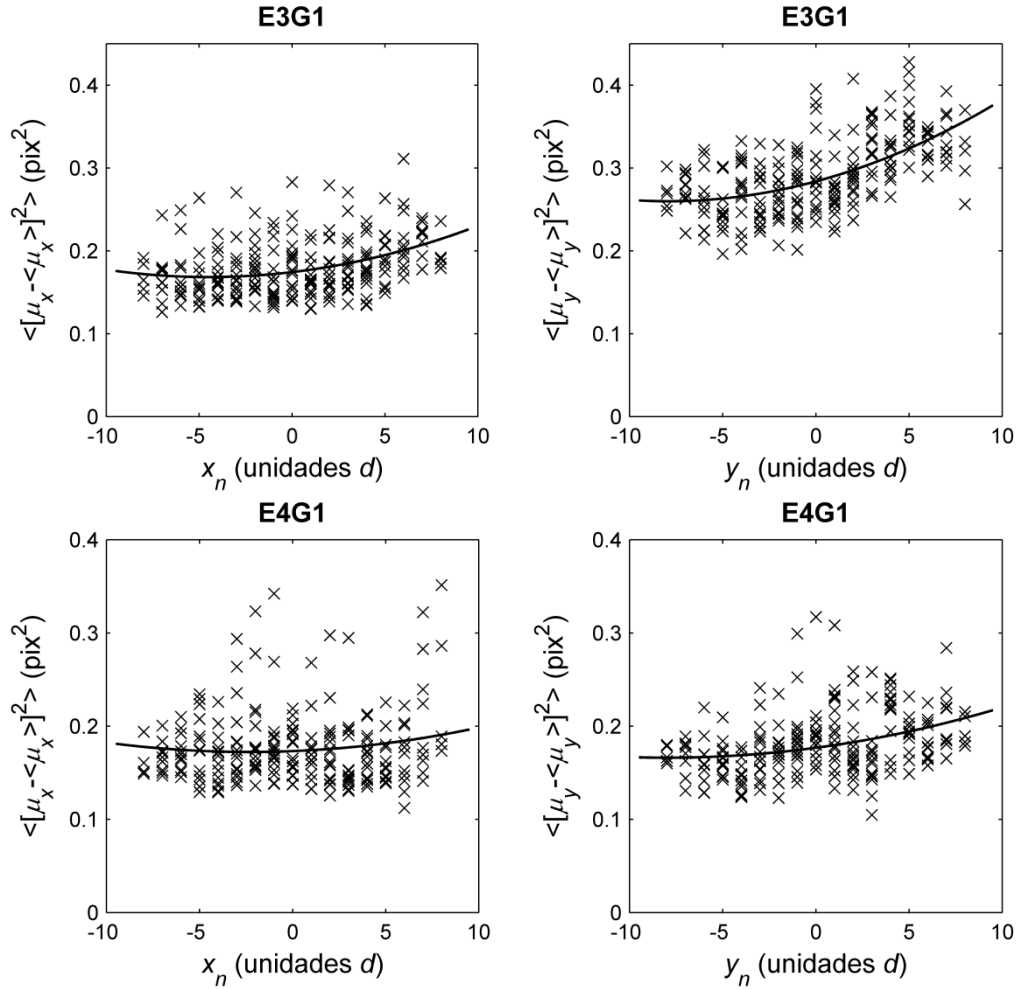
En las figuras 7.12 y 7.13 se representan las varianzas experimentales de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los centroides de 4 ojos del grupo G1, junto con las parábolas resultantes del ajuste por mínimos cuadrados de la expresión predicha por el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Por su parte, en la tabla 7.5 se recogen las estimaciones de los diferentes parámetros del modelo, así como los valores del coeficiente de determinación y los resultados de la prueba del cociente de verosimilitudes. Además, en la tabla 7.6 se recogen esos mismos resultados cuando se sustrae la contribución de los

prismas con el procedimiento descrito en el apartado 5.5.2. Por brevedad, no se presentan los resultados obtenidos para la suma de varianzas de las dos componentes ortogonales de los centroides de cada localización.



**Figura 7.12:** Varianzas de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los centroides de los ojos E1G1 y E2G1 y parábolas resultantes del ajuste de la expresión (5.55) predicha por el modelo de fluctuaciones de desenfoque.

En algunos de los ajustes se obtuvieron valores de los parámetros sin sentido para el modelo, como varianzas  $\sigma_a^2 < 0$  o valores de  $\langle b_x \rangle$  y  $\langle b_y \rangle$  extremadamente altos. En esos casos, los resultados que se muestran en las figuras y en la tabla se corresponden con un ajuste por mínimos cuadrados restringidos en el que se fuerza a que  $\sigma_a^2 \geq 0$  y que  $|\langle b_x \rangle|, |\langle b_y \rangle| \leq R_p$ . Además, para esas situaciones los parámetros de la tabla 7.5 se muestran sin incertidumbres, ya que su estadística es difícil de caracterizar, y tampoco se realiza la prueba del cociente de verosimilitudes.



**Figura 7.13:** Varianzas de las componentes  $x$  e  $y$  de los centroides de los ojos E3G1 y E4G1 y parábolas resultantes del ajuste de la expresión (5.55) predicha por el modelo de fluctuaciones de desenfoque.

En la figura 7.12 se pueden observar ciertas diferencias en el comportamiento de las varianzas de las dos componentes de los centroides de E1G1. En efecto, las varianzas  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  toman valores mayores que los de  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y en ellas hay una mayor variabilidad. Esto se ve confirmado por los ajustes obtenidos para el modelo de desenfoque. Nótese que ambos casos el mínimo residuo se alcanza para las parábolas centradas en el borde de la pupila, que es la posición más alejada permitida. La parábola obtenida para  $u = x$  crece suavemente con  $x_n$  y tiene un valor de  $R^2$  más pequeño, lo que confirma la mayor variabilidad de los datos. La parábola de  $u = y$  muestra un crecimiento más rápido con  $y_n$ . Estos comportamientos no se corresponden ni con el modelo de fluctuaciones de desenfoque (debido a la posición de los mínimos de las parábolas), ni con un modelo homogéneo en general (debido a los cambios de las varianzas con la posición). Además, la tabla 7.6 muestra que los valores de los



parámetros de los ajustes no se modifican sustancialmente tras sustraer los prismas de los desplazamientos de los centroides.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$	$F_0$	$P_F$
E1G1	$x$	0.08	-2.2	—	0.11	—	—
	$y$	0.11	—	-2.2	0.45	—	—
E2G1	$x$	$0.20 \pm 0.01$	$-0.6 \pm 0.2$	—	0.30	45.9	0.000
	$y$	$0.08 \pm 0.04$	—	$-1 \pm 1$	0.01	0.92	0.400
E3G1	$x$	$0.09 \pm 0.02$	$1.2 \pm 0.7$	—	0.13	15.8	0.000
	$y$	$0.10 \pm 0.02$	—	$-2 \pm 1$	0.34	56.3	0.000
E4G1	$x$	$0.07 \pm 0.03$	$-1 \pm 1$	—	0.01	1.4	0.243
	$y$	0.07	—	-2.2	0.11	—	—

**Tabla 7.5:** Resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las varianzas de los desplazamientos de los centroides de 4 ojos del grupo G1. Los parámetros sin incertidumbre se obtuvieron usando mínimos cuadrados restringidos.

Para el ojo E2G1 hay diferencias más marcadas si cabe entre las varianzas de las dos componentes. Mientras que el ajuste realizado para  $u = x$  estima el elevado valor de  $\sigma_a = 0.20 \pm 0.01$  D con  $R^2 = 0.30$ , para  $u = y$  se obtiene que la varianza del desenfoque sólo vale  $0.08 \pm 0.04$  D y que  $R^2 = 0.01$ . Además, para este último caso la prueba del cociente de verosimilitudes no permite descartar la hipótesis de que las varianzas no cambien con  $y_n$ . En la gráfica también se observa que los valores de  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  son mayores que los de  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$ . Este fenómeno y el distinto ritmo de crecimiento de las parábolas de las dos componentes presumiblemente se deban a la contribución de modos de la aberración sin simetría rotacional, como los astigmatismos. La sustracción de los prismas reduce los valores estimados para los descentramientos oculares promedio, como muestra la tabla 7.6.

Para el ojo E3G1 las diferencias entre los valores de  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  son menos acusadas que en los casos anteriores. Para  $u = x$ , la variación de las varianzas con  $x_n$  es moderada: la parábola crece con  $\sigma_a = 0.09 \pm 0.02$  D y está relativamente cerca del centro de la pupila. En cambio, para  $u = y$  las varianzas muestran mayores cambios con  $y_n$ : aunque la estimación de  $\sigma_a$  sea próxima a la de  $u = x$ , el mínimo de la parábola está más alejado del centro de la pupila.

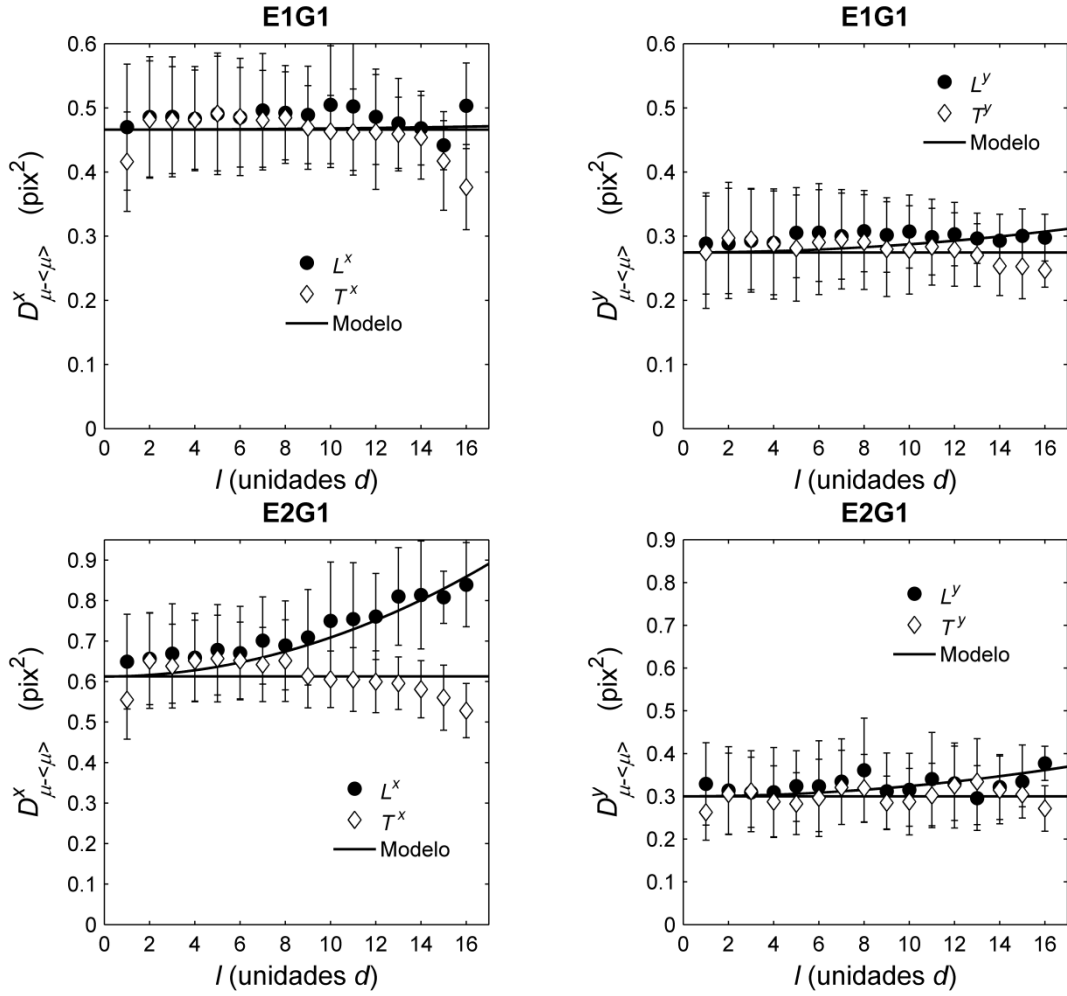
El ojo E4G1 muestra el comportamiento más compatible con la homogeneidad de las aberraciones: los cambios de las varianzas de los centroides con las coordenadas de las microlentes son muy moderados. Así, además de las bajas estimaciones para  $\sigma_a$  y de los bajos valores de  $R^2$ , la prueba del cociente de verosimilitudes para  $u=x$  no rechaza la hipótesis de que las varianzas no cambien con  $x_n$ . Por otro lado,  $\langle \tilde{\mu}_x^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  y  $\langle \tilde{\mu}_y^2(\mathbf{r}_n) \rangle$  toman valores similares, lo que es compatible con la isotropía.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$	$F_0$	$P_F$
E1G1	$x$	0.07	-2.2	—	0.08	—	—
	$y$	0.11	—	-2.2	0.53	—	—
E2G1	$x$	$0.20 \pm 0.01$	$-0.3 \pm 0.1$	—	0.20	27.8	0.000
	$y$	$0.07 \pm 0.04$	—	$0.1 \pm 0.8$	0.00	0.41	0.667
E3G1	$x$	$0.10 \pm 0.02$	$-1.0 \pm 0.5$	—	0.14	18.1	0.000
	$y$	$0.13 \pm 0.01$	—	$-1.0 \pm 0.3$	0.33	53.2	0.000
E4G1	$x$	0.04	-0.9	—	0.00	—	—
	$y$	$0.07 \pm 0.03$	—	$-1 \pm 1$	0.05	5.7	0.004

**Tabla 7.6:** Resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las varianzas de los desplazamientos de los centroides de 4 ojos del grupo G1 tras descontar la contribución de los prismas.

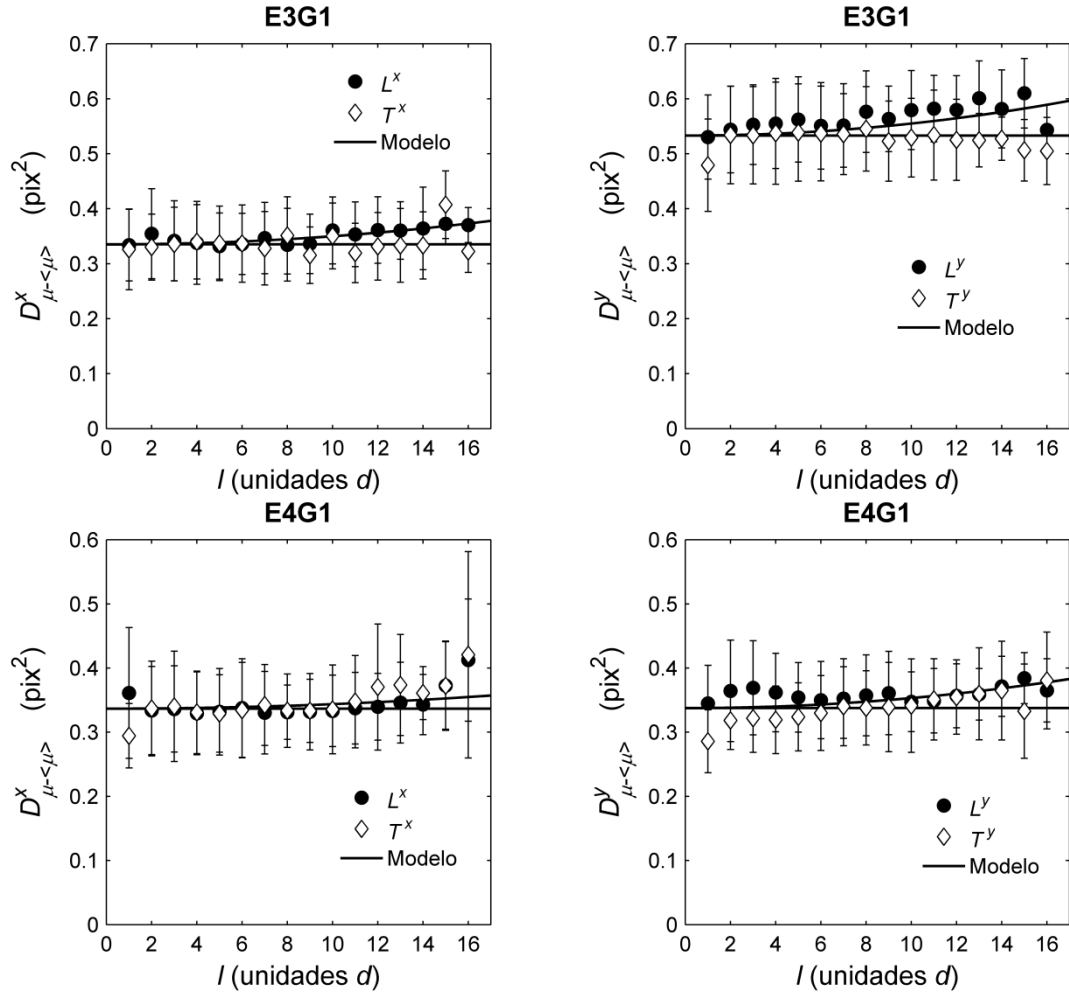
### c) Funciones de estructura

Las figuras 7.14 y 7.15 recogen los valores experimentales de la LSSF y de la TSSF de las componentes  $u=\{x, y\}$  de 4 ojos del grupo G1. La abscisa es la separación  $l$  entre las coordenadas de los centros de cada par de microlentes. En los 4 ojos la TSSF tiende a no cambiar con la separación  $l$  entre microlentes. Por su parte, la LSSF o bien no varía con  $l$  o bien lo hace muy moderadamente, con la excepción de la componente  $u=x$  del ojo E2G1, en la que hay un importante crecimiento. En las figuras también se incluyen las curvas que resultan del ajuste por mínimos cuadrados ponderados de las expresiones (5.58) predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque. De nuevo, es necesario incluir en el modelo una constante  $q_2$  distinta de cero. En los 8 ajustes graficados se obtienen valores positivos de  $q_1$  (i. e., estimaciones de  $\sigma_a$  reales). De no ser así, se repetiría el ajuste correspondiente usando mínimos cuadrados restringidos, esta vez sin ponderar, en donde se forzaría a que  $q_1 \geq 0$ . En la tabla 7.7 se recogen los valores de los parámetros estimados con los ajustes, así como los resultados de las pruebas de chi cuadrado.



**Figura 7.14:** LSSF (círculos) y TSSF (rombos) de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los ojos E1G1 y E2G1 frente a la distancia normalizada entre cada par de microlentes,  $l$ . Las líneas continuas son ajustes por mínimos cuadrados ponderados del modelo de fluctuaciones de desenfoque.

Los valores estimados para  $\sigma_a$  son menores que 0.10 D, con la excepción de la componente  $u = x$  del ojo E2G1, para la que  $\sigma_a = 0.16 \pm 0.02$  D. Las dos estimaciones de  $\sigma_a$  obtenidas para cada ojo son compatibles dentro de las incertidumbres de los ajustes, a excepción de nuevo de E2G1. Para los ojos E1G1, E2G1 y E3G1 los valores  $L_{\mu}^x(l)$  son marcadamente diferentes de los de  $L_{\mu}^y(l)$ . Lo mismo sucede con las TSSF. De acuerdo con el resultado dado por la expresión (5.23), esto es indicativo de la no isotropía de estas aberraciones. Los parámetros  $\Gamma$  son particularmente elevados en algunos casos. Este hecho se debe al alto valor de  $q_2$  unido al bajo valor de  $q_1$  que se obtiene en ciertos ajustes. En relación con las pruebas de chi cuadrado, estas son no significativas para los ajustes de las dos componentes de los cuatro ojos presentados. De nuevo, los valores de  $\chi^2_{\nu}$  son particularmente bajos y los valores de  $P$  prácticamente iguales a la unidad.

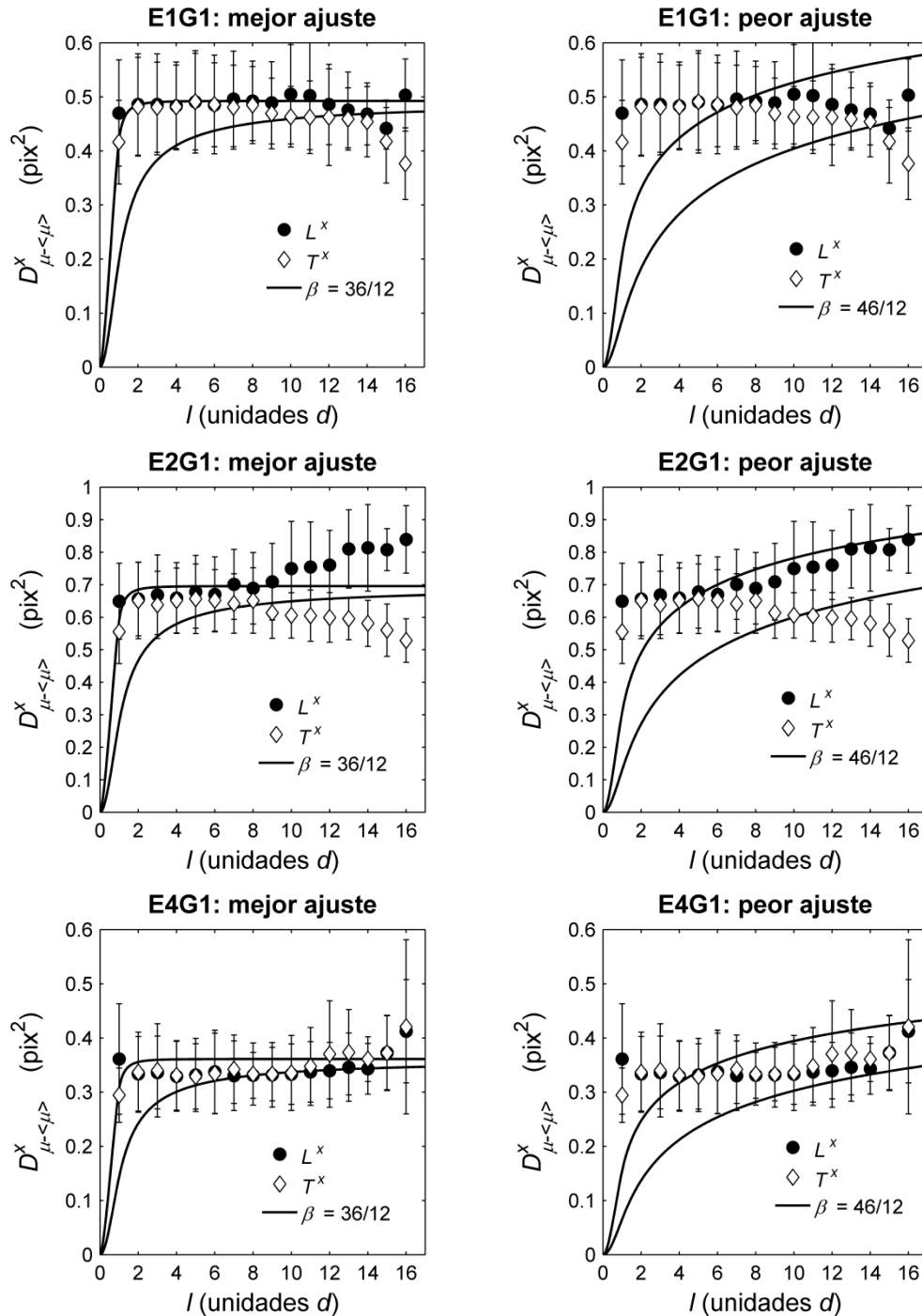


**Figura 7.15:** LSSF y TSSF de las componentes  $u = \{x, y\}$  de E3G1 y E4G1 frente a la distancia  $l$  entre microlentes. Las líneas continuas son ajustes del modelo de desenfoque.

Ojo	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\Gamma$ (mm)	$\chi^2_\nu$	$P$
E1G1	$x$	$0.02 \pm 0.09$	$40 \pm 200$	0.158	1.000
	$y$	$0.06 \pm 0.03$	$13 \pm 6$	0.094	1.000
E2G1	$x$	$0.16 \pm 0.02$	$6.9 \pm 0.9$	0.158	1.000
	$y$	$0.08 \pm 0.02$	$10 \pm 3$	0.074	1.000
E3G1	$x$	$0.06 \pm 0.02$	$13 \pm 5$	0.070	1.000
	$y$	$0.08 \pm 0.03$	$13 \pm 5$	0.105	1.000
E4G1	$x$	$0.04 \pm 0.05$	$19 \pm 21$	0.091	1.000
	$y$	$0.07 \pm 0.02$	$13 \pm 5$	0.101	1.000

**Ta bla 7.7:** Resultados de los ajustes del modelo de desenfoque a las LSSF y las TSSF de 4 ojos de G1.

La figura 7.16 muestra los ajustes por mínimos cuadrados ponderados de las expresiones (5.32), predichas por las leyes de potencias, a las funciones de estructura de la componente  $u = x$  de E1G1, E2G1 y E4G1. Para cada ojo se grafica el mejor y el peor ajuste en términos de  $\chi_0^2$  de los modelos con  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .



**Figura 7.16:** Ajustes de leyes de potencias a las LSSF y TSSF de  $u = x$  para E1G1, E2G1 y E4G1. Para cada ojo se grafica el mejor y el peor ajuste según  $\chi_0^2$  de modelos con  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .

En la tabla 7.8 se recogen los resultados de la prueba de chi cuadrado para las dos componentes de los 4 ojos usando los cuatro exponentes considerados. En los cuatro ojos se verifica que los ajustes son mejores en términos de  $\chi^2_0$  cuanto menor es el exponente, una tendencia ya observada en los ojos jóvenes (cf. el subapartado 7.1.2c). Esto se debe principalmente al hecho de que la LSSF y, en especial, la TSSF experimentales permanezcan constantes para valores bajos de  $l$  en lugar de decrecer conforme  $l$  disminuye, como predicen sobre todo las leyes de mayor exponente.

		E1G1		E2G1		E3G1		E4G1	
$u$	$\beta$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$	$\chi^2_v$	$P$
$x$	36/12	0.62	0.952	0.96	0.525	0.41	0.999	0.49	0.992
	40/12	1.1	0.307	1.2	0.192	0.71	0.880	0.84	0.718
	44/12 <sup>5</sup>	2.1	0.000	1.8	0.004	1.4	0.080	1.5	0.043
	46/12	2.8	0.000	2.3	0.000	1.9	0.002	2.0	0.001
$y$	36/12	0.28	1.000	0.27	1.000	0.54	0.983	0.39	0.999
	40/12	0.45	0.996	0.41	0.999	1.0	0.446	0.85	0.699
	44/12	0.81	0.756	0.69	0.901	2.1	0.000	1.8	0.004
	46/12	1.1	0.305	0.92	0.586	3.0	0.000	2.5	0.000

**Tabla 7.8:** Resultados de los ajustes de las expresiones (5.32), predichas por modelos de ley de potencias de exponente  $\beta$ , a los datos de la LSSF y de la TSSF para cada componente  $u$  de 4 ojos del grupo G1.

En general, los valores de  $P$  obtenidos con los ajustes de las leyes de potencias son menores que los del modelo de fluctuaciones de desenfoque. A pesar de ello, no todos los ajustes son significativos. Para  $\beta=46/12$  y  $44/12$ , la prueba es significativa para al menos una de las componentes de los cuatro ojos. Por el contrario, para  $\beta=36/12$  y  $40/12$  la prueba es no significativa para las dos componentes de los cuatro ojos. Así, con  $\beta=46/12$  hay significatividad al 1 % para la componente  $u=x$  de E1G1, para  $u=x$  en E2G1, para las dos componentes de E3G1 y para las dos componentes de E4G1. Por su parte, para el modelo de Kolmogorov hay significatividad para la componente  $u=x$  de E1G1 (al 1 %), para  $u=x$  en E2G1 (al 1 %), para  $u=y$  en E3G1 (al 1 %) y para las dos componentes de E4G1 (al 5% para  $u=x$  y al 1 % para  $u=y$ ). En consecuencia, de acuerdo con la prueba de chi cuadrado los datos de las funciones de estructura de estos 4

<sup>5</sup> Al comparar los resultados de E1G1 con los del artículo (Pailos et al. 2010) ha de tenerse presente que en el segundo caso no se usaron mínimos cuadrados ponderados, por lo que  $\chi^2_v$  es ligeramente mayor.

ojos son incompatibles con leyes de potencias de exponentes elevados, como el modelo de Kolmogorov, pero no se puede rechazar la validez de modelos con exponentes más bajos (estas conclusiones se fundamentan en exclusiva en las funciones de estructura, ya que las varianzas de los centroides ofrecen cierta evidencia de no homogeneidad para tres de estos ojos). A pesar de la no significatividad, las leyes de potencias no explican algunos comportamientos experimentales, como que la LSSF y la TSSF sean similares para  $l$  bajos en los 4 ojos considerados debido a que la TSSF permanece constante, algo que también ocurre con los ojos jóvenes del apartado 7.1.2.

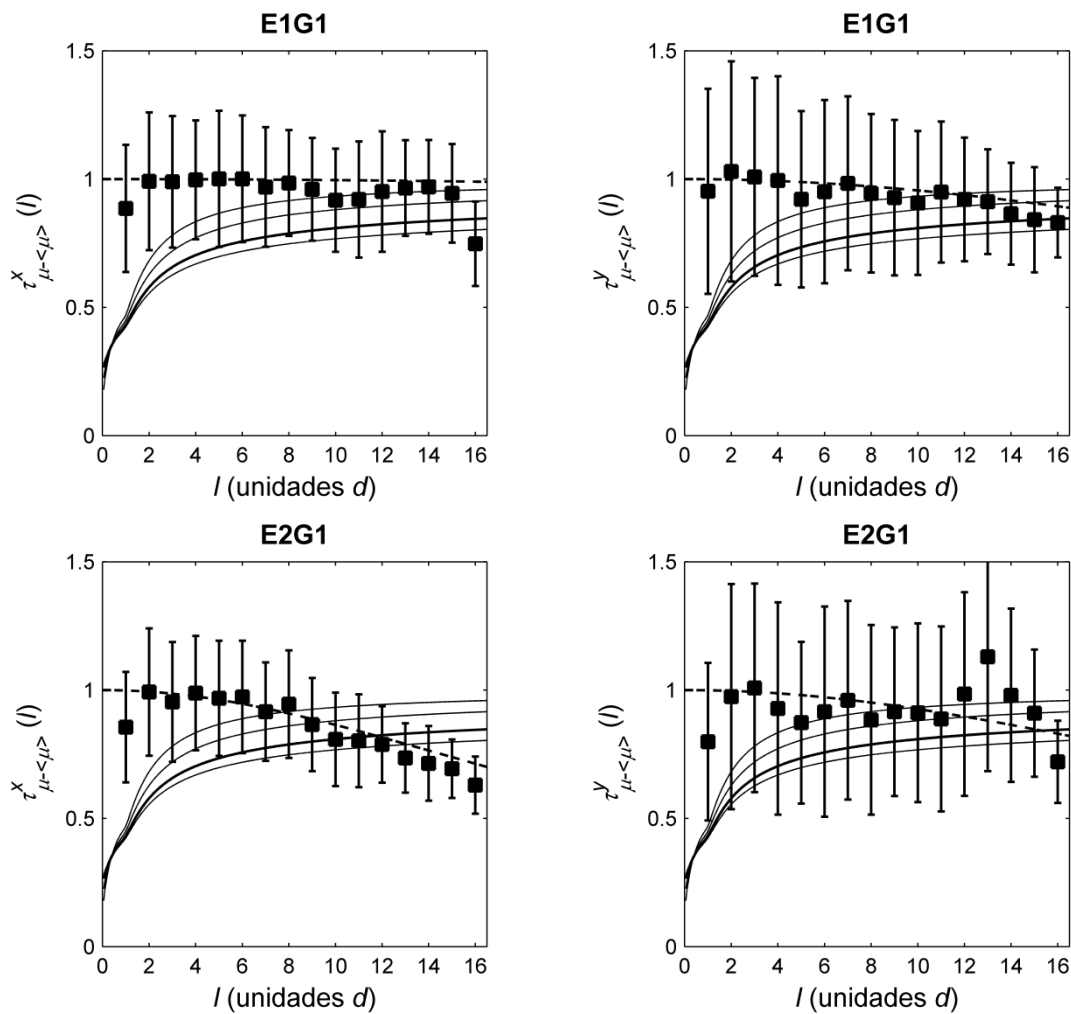
Comentemos los resultados obtenidos para los ajustes del modelo de desenfoque a las funciones de estructura de los 32 ojos restantes del grupo G1 que poseen un diámetro de pupila ocular de al menos 4.9 mm durante las medidas. Los resultados que se presentan se refieren a las series temporales completas, con el número total de medidas válidas, que en muchos casos es inferior al  $K = 380$  considerado en los 4 ojos presentados en este apartado. Por lo que se refiere a la prueba de chi cuadrado, las elevadas varianzas de los datos hacen que sólo los ajustes de una de las componentes de 2 de las series temporales sean significativos. Únicamente en 4 de las 32 series las estimaciones de  $\sigma_a$  superan las 0.1 D para  $u = x$  y  $u = y$ . En total, esto mismo sucede para 4 de las 36 series temporales completas del grupo G1 (en las que se analizan los datos contenidos en una pupila con  $R_p = 2.45$  mm) y para 4 de las 12 series completas del grupo G2 (en las que se usa una pupila con  $R_p = 2.80$  mm). Aunque parece que existe una mayor proporción de ojos jóvenes con fluctuaciones importantes de desenfoque, es muy posible que estos resultados estén afectados por los errores refractivos de los diferentes ojos, que provocan que existan diferentes demandas de acomodación durante la toma de las medidas. En 13 de los 32 ojos restantes del grupo G1 el valor predicho para  $\sigma_a^2$  en al menos uno de los dos ajustes es negativo. En esos casos se opta por repetir el ajuste usando mínimos cuadrados restringidos sin ponderar. La mayoría de las veces el nuevo valor estimado es de  $\sigma_a = 0.0$  D.

Las pruebas de chi cuadrado de los ajustes de las leyes de potencias son no significativas para los 4 exponentes considerados y las dos componentes de 10 de los 32 ojos restantes del grupo G1. Únicamente en dos de las series la prueba es significativa al 5 % para los 4 exponentes en al menos una de las componentes de los centroides. En otra de las series la prueba es significativa al 1 % para los tres exponentes mayores. En los 19 ojos restantes los ajustes de  $\beta = 36/12$  y  $40/12$  son no significativos. En esos ojos o bien el ajuste de  $\beta = 46/12$  es significativo o bien lo son los ajustes de tanto  $46/12$  y

44/12. De nuevo, los valores de  $P$  obtenidos son menores que los ligados al modelo de fluctuaciones de desenfoque. Finalmente, los mejores ajustes tienen lugar otra vez para los exponentes más bajos. Tan sólo hay un ajuste en el que esto no se cumple, en el que existe una situación similar a la de la componente  $u = x$  del ojo E1G2 (figura 7.7a).

d) *Parámetros tau*

Las figuras 7.17 y 7.18 grafican los parámetros tau de 4 ojos del grupo G1. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque, construidas con los parámetros obtenidos en los ajustes de las SSF. Las líneas continuas se corresponden con las leyes de potencias con exponentes  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .

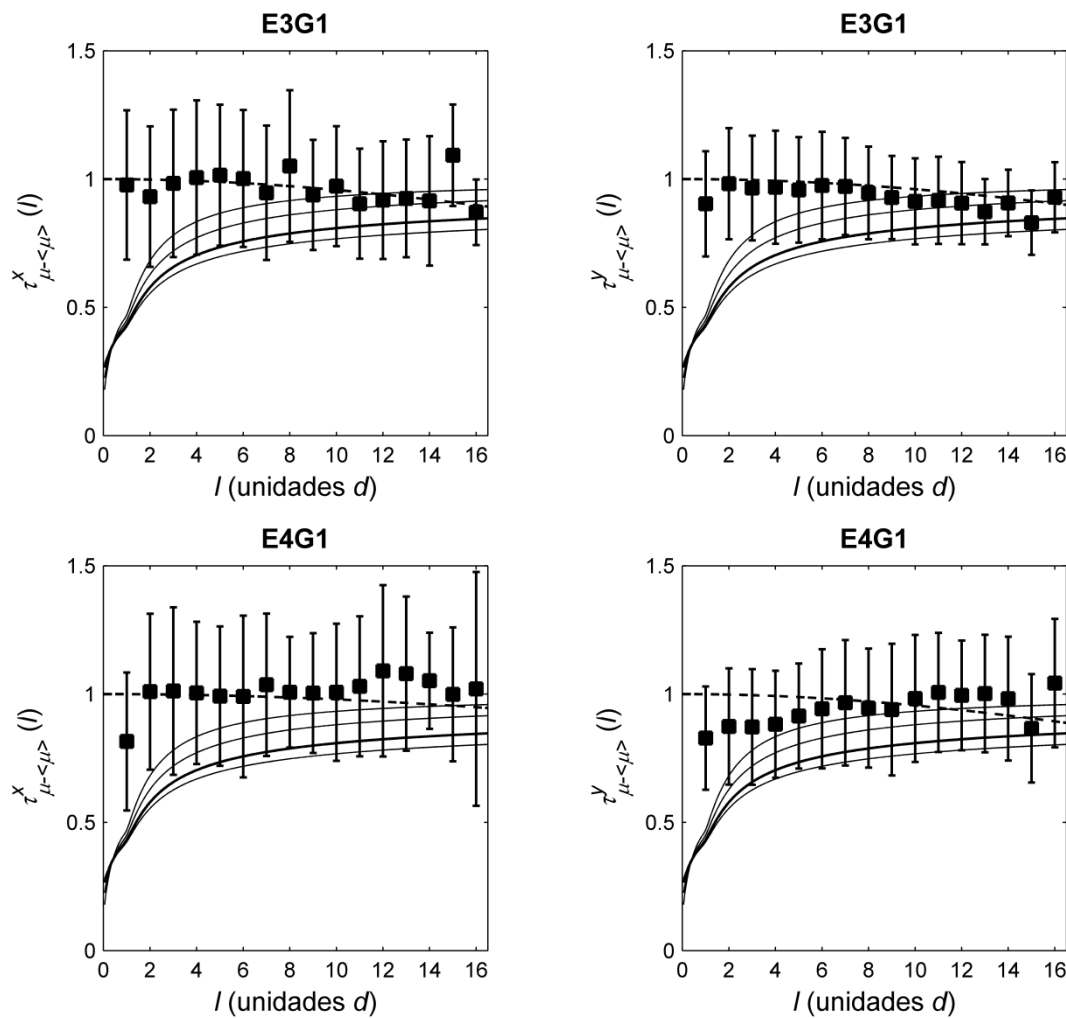


**Figura 7.17:** Parámetro tau de las componentes  $u = \{x, y\}$  de E1G1 y E2G1. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque con los parámetros de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12$  (de mayor espesor) y  $46/12$ .

La situación presente en las gráficas es, en buena medida, la comentada para los ojos jóvenes del subapartado 7.1.2d). En general los datos están mejor representados por



el modelo de fluctuaciones de desenfoque, sobre todo para bajos valores de  $l$ , en los que los valores experimentales son notablemente superiores a los predichos por las leyes de potencias. La excepción la constituye la componente  $u=y$  de E4G1. Para  $l$  elevados se produce un decaimiento de los datos experimentales en los ojos con valores altos de  $\sigma_a$ , como es el caso de la componente  $u=x$  de E2G1. En el resto de casos, los valores experimentales o bien decrecen muy ligeramente con  $l$  o bien se mantienen constantes y próximos a la unidad, como para  $u=x$  en E4G1. Cuando esto sucede, las altas varianzas de los datos provocan que el comportamiento en esta región sea compatible tanto con el modelo de desenfoque como con las leyes de potencias. En estas situaciones, en el ajuste del modelo de desenfoque a las funciones de estructura se obtienen estimaciones moderadas del parámetro  $q_1$  y valores altos de  $q_2$  (i. e.,  $\Gamma$  elevados en la tabla 7.7).



**Figura 7.18:** Parámetro tau de las componentes  $u=\{x, y\}$  de E3G1 y E4G1. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque con los parámetros de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12$  (de mayor espesor) y  $46/12$ .

## 7.2 Estadística de poblaciones de ojos

En esta sección se utilizan los métodos presentados en el capítulo 5 para el estudio de la estadística espacial de poblaciones de ojos. La aplicación de los métodos a esta nueva tarea es inmediata. Supongamos que se dispone de una muestra de  $K$  ojos. Para cada ojo  $k$  se miden los gradientes locales del frente de ondas,  $\mathbf{m}^{(k)}$ , usando un sensor HS. Ahora cada realización  $k$  de los procesos aleatorios está ligada a un ojo en particular y el valor esperado  $\langle \rangle$  actúa sobre el conjunto de ojos de la muestra.

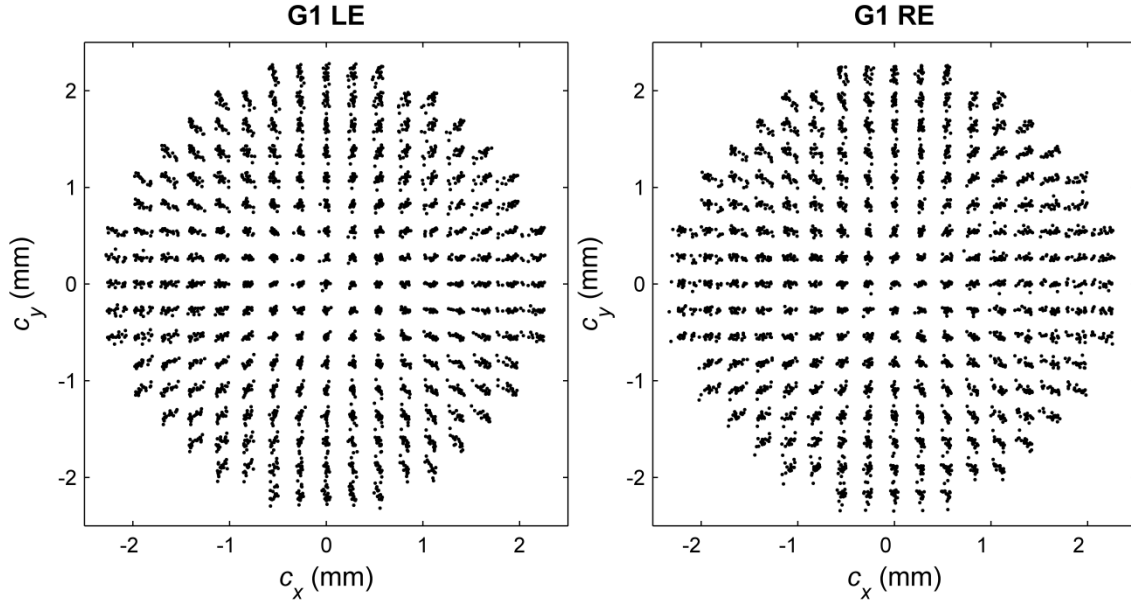
En nuestro caso disponemos de dos grupos de ojos: el G1, de ojos pertenecientes a personas mayores de 45 años, y el G2, de ojos de personas jóvenes. En el primero hay 36 ojos con diámetros de pupila mayores que 4.9 mm y en el segundo hay 12 con diámetros mayores que 5.6 mm. En la sección 4.1 se comentó que algunos estudios encuentran en las aberraciones estimadas de los ojos izquierdo y derecho de una persona cierta tendencia a la simetría especular en torno al eje vertical. Para evitar que dicha simetría afecte a los resultados, conviene procesar cada tipo de ojo por separado. Como la muestra de cada subconjunto del grupo G2 es muy pequeña,  $K=6$ , solo se presentan los resultados del grupo G1. Hay  $K=18$  ojos izquierdos y  $K=18$  ojos derechos.

En esta sección el valor de las componentes  $m_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  de cada ojo se estima promediando todas las medidas válidas de su serie temporal. Debido a este promediado y al elevado valor de las variaciones de las aberraciones entre diferentes ojos, se desprecia el efecto del ruido. Por tanto, se considera que  $\mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  equivale a  $m_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$ .

### 7.2.1 Resultados

En la figura 7.19 se muestran el diagrama de centroides del conjunto de ojos izquierdos considerado del grupo G1 (G1 LE) y el diagrama del conjunto de ojos derechos (G1 RE). Se emplea un factor  $Q=5$  en las gráficas. Los diagramas muestran claros indicios de que la estadística es no homogénea y dominada por el desenfoque. Las gráficas de la figura 7.19 y las de las varianzas de los centroides se obtuvieron tras descontarles a los desplazamientos  $\mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  de cada ojo un término constante igual a su promedio entre microlentes:  $N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$ . Esto equivale a descontarle un término de prisma a la aberración causante de dichos desplazamientos. Como se comentó en el subapartado 5.5.2, aquí con prisma nos referimos al gradiente promedio de la aberración en la pupila considerada y no a los modos del desarrollo de Zernike de la aberración. Si no se realiza la sustracción, los prismas distorsionan las nubes de centroides y

modifican las gráficas de las varianzas. No obstante, las funciones de estructura no se ven afectadas. A  $\mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n) - N^{-1} \sum_{n=1}^N \mu_u^{(k)}(\mathbf{r}_n)$  se le descuenta su valor medio entre ojos para trabajar de nuevo con procesos aleatorios de valor medio cero.

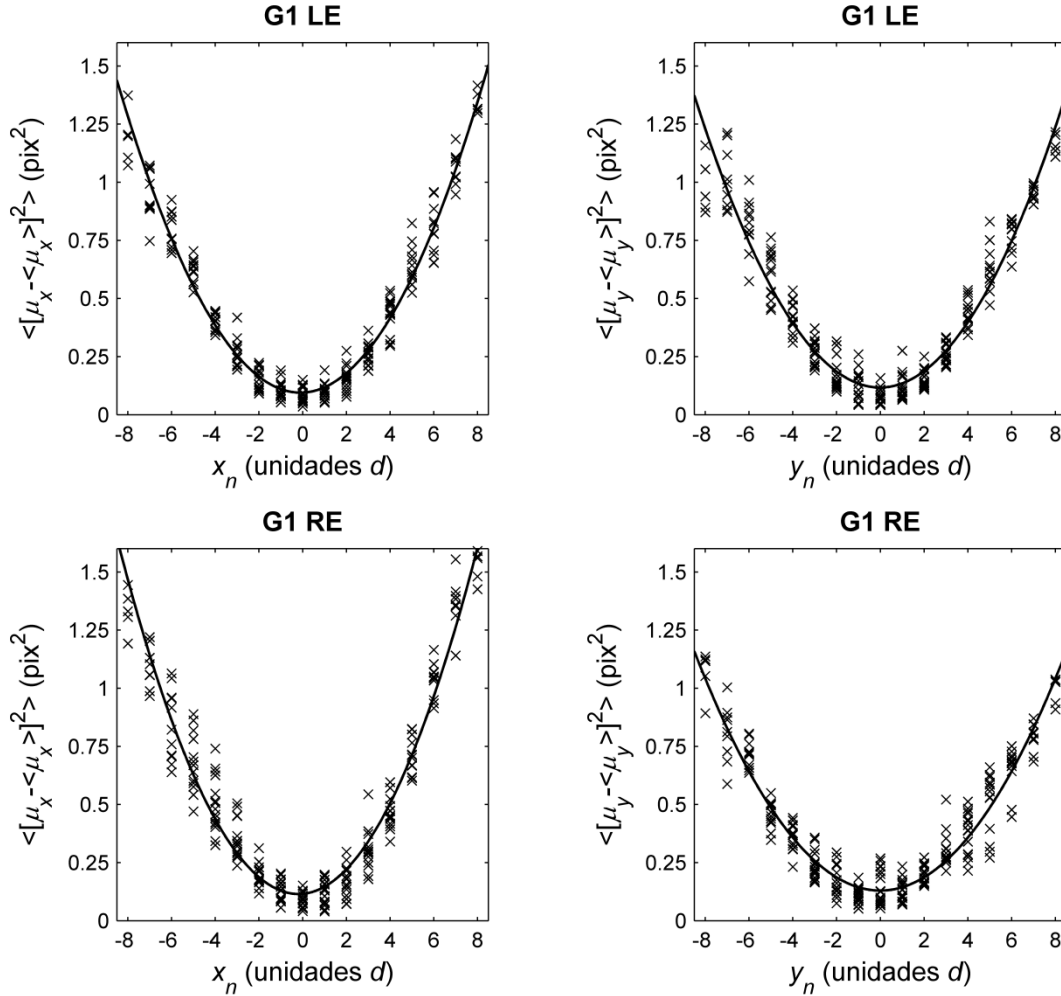


**Figura 7.19:** Diagramas de centroides de una muestra de 18 ojos izquierdos (G1 LE) y de otra de 18 ojos derechos (G1 RE). En los dos diagramas se aumentan las fluctuaciones de los centroides un factor  $Q=5$ .

En la figura 7.20 se representan las varianzas de las dos componentes de los centroides de los conjuntos de ojos G1 LE y G1 RE. También se incluyen los ajustes de las expresiones predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque. Por su parte, en la figura 7.21 se recoge la misma información para las LSSF y las TSSF. Los resultados de los ajustes del modelo de desenfoque a las varianzas y a las funciones de estructura se recogen en la tabla 7.9.

Los ajustes del modelo de desenfoque a las varianzas predicen una desviación típica  $\sigma_a$  de en torno a 0.7 D para los dos conjuntos de ojos. Estos valores son ligeramente superiores a los obtenidos como resultado del ajuste de los gradientes de  $M=35$  polinomios de Zernike a los centroides, con  $R_p=2.45$  mm: 0.64 D para el conjunto G1 LE y 0.63 D para el conjunto G1 RE. En la tabla 7.20 se observa cierta discrepancia entre los valores estimados para  $\sigma_a$  con el ajuste de cada componente, especialmente para el caso del conjunto G1 RE. Esta diferencia podría deberse a la influencia de las fluctuaciones de modos no rotacionalmente simétricos, como el astigmatismo. Por otro lado, los valores estimados para  $\sigma_a$  con las varianzas de los centroides son compatibles con los obtenidos usando las funciones de estructura. A este hecho ayuda la sustracción de los prismas realizada en esta sección, como sucede para algunas series de ojos

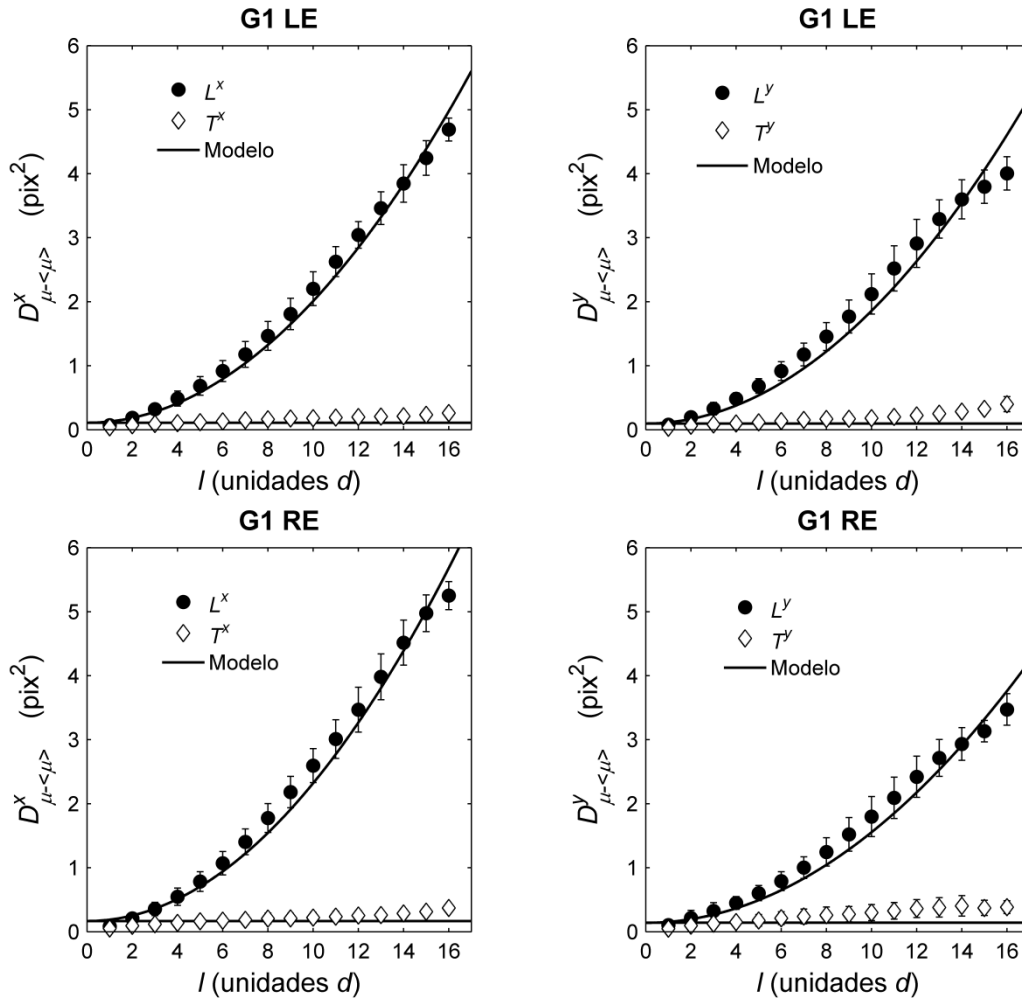
individuales con fluctuaciones relevantes de desenfoque (e. g., los ojos A, B y E1G2), aunque no para todas. Según lo discutido en el subapartado 5.4.2a), la presencia de prismas no altera el ritmo de crecimiento de la parábola teórica de las varianzas. En la práctica, que la parábola esté centrada en posiciones distintas puede conducir a estimaciones diferentes de  $\sigma_a$ . Los ajustes de las varianzas tienen valores altos de  $R^2$ , del orden de 0.90. Además, el cociente de verosimilitudes rechaza con el 1 % de significatividad la hipótesis de varianzas constantes.



**Figura 7.20:** Varianzas de las componentes  $u=\{x, y\}$  de los centroides de los conjuntos de ojos G1 LE y G1 RE. Las parábolas son los ajustes de la expresión (5.55) del modelo de fluctuaciones de desenfoque.

Por lo que respecta a los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las LSSF y de las TSSF, las curvas obtenidas describen bien las propiedades básicas observadas en los datos: valores similares de la LSSF y de la TSSF para separaciones  $l$  pequeñas, fuerte crecimiento de la LSSF con  $l$  y muy débil de la TSSF en comparación. No obstante, las pruebas de chi cuadrado revelan que tres de los ajustes son significativos al 1 % y que el cuarto lo es al 5 %. Por tanto, se ha de rechazar el

modelo propuesto. Las razones de este resultado se encuentran en las bajas desviaciones típicas de los datos, que son menores que los símbolos representados en las gráficas para muchos puntos de la TSSF, y en ciertas desviaciones de los datos respecto al comportamiento predicho por el modelo. Así, la TSSF no se mantiene constante con  $l$ , sino que crece ligeramente, mientras que la LSSF crece más rápidamente que la predicción para bajos valores de  $l$  y modera su crecimiento para  $l$  altos.



**Figura 7.21:** Funciones de estructura de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los centroides de los conjuntos de ojos izquierdos y derechos del grupo G1. Las curvas son los ajustes de las expresiones (5.58).

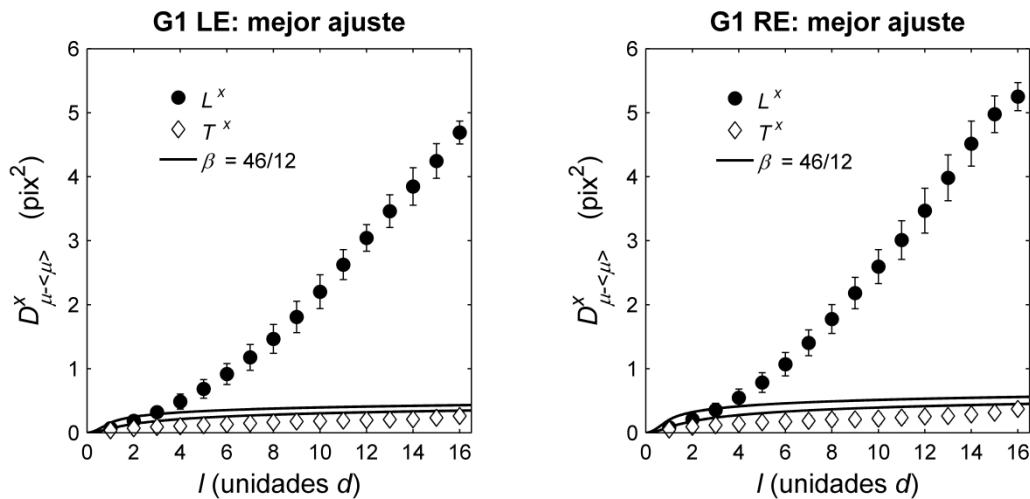
Los ajustes de los modelos de ley de potencias con  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$  son significativos al 1 % para las dos componentes de los conjuntos G1 LE y G1 RE. Los valores de  $P$  obtenidos son más bajos que los del modelo de desenfoque, lo que indica un mayor nivel de incompatibilidad con los datos. En la figura 7.22 se grafican los mejores ajustes obtenidos para la componente  $u = x$  de los dos conjuntos. En los dos casos el mejor ajuste se corresponde con  $\beta = 46/12$ . Claramente, el modelo teórico no es capaz de seguir los diferentes ritmos de crecimiento de la LSSF y de la TSSF.

a) Ajustes del modelo de desenfoque a las varianzas						
Conjunto	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\langle b_x \rangle$ (mm)	$\langle b_y \rangle$ (mm)	$R^2$	$P_F$
G1 LE	$x$	$0.722 \pm 0.005$	$-0.028 \pm 0.008$	—	0.96	0.000
	$y$	$0.691 \pm 0.006$	—	$0.00 \pm 0.01$	0.93	0.000
	“Suma”	$0.719 \pm 0.007$	$-0.04 \pm 0.01$	$-0.03 \pm 0.01$	0.93	0.000
G1 RE	$x$	$0.780 \pm 0.006$	$-0.05 \pm 0.01$	—	0.95	0.000
	$y$	$0.625 \pm 0.006$	—	$0.00 \pm 0.01$	0.92	0.000
	“Suma”	$0.71 \pm 0.01$	$-0.05 \pm 0.02$	$-0.02 \pm 0.02$	0.81	0.000

b) Ajustes del modelo de desenfoque a las funciones de estructura					
Conjunto	$u$	$\sigma_a$ (D)	$\Gamma$ (mm)	$\chi^2_\nu$	$P$
G1 LE	$x$	$0.722 \pm 0.009$	$0.65 \pm 0.04$	2.13	0.000
	$y$	$0.69 \pm 0.01$	$0.64 \pm 0.04$	2.71	0.000
G1 RE	$x$	$0.77 \pm 0.01$	$0.76 \pm 0.04$	3.20	0.000
	$y$	$0.62 \pm 0.01$	$0.86 \pm 0.06$	1.63	0.017

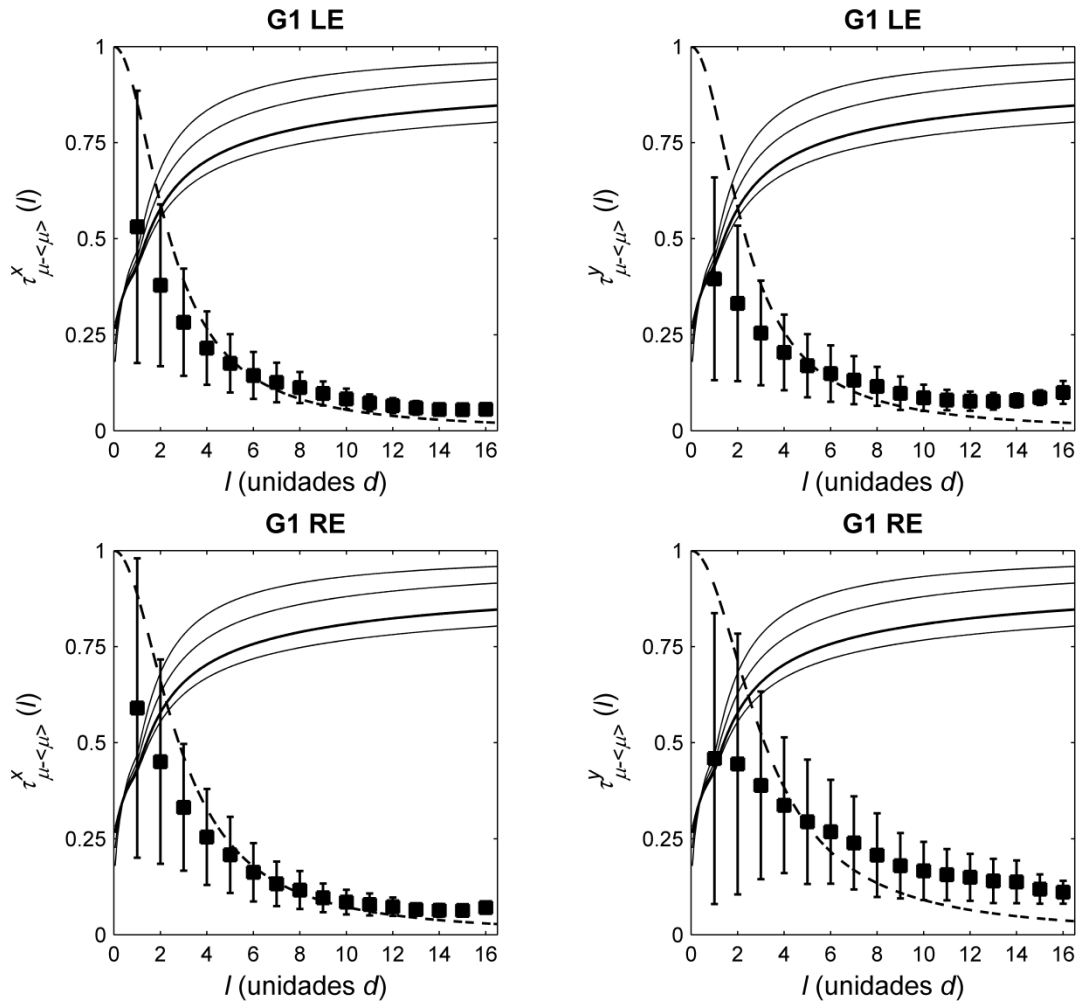
**Ta**bla 7.9: Resultados de los ajustes de las expresiones del modelo de fluctuaciones de desenfoque a: a) las varianzas y a b) las funciones de estructura de los conjuntos de ojos izquierdos y derechos de G1.



**Figura 7.22:** Ajustes de leyes de potencias a las LSSF y TSSF de la componente  $x$  de G1 LE y G1 RE. Se grafican los mejores ajustes en términos de  $\chi^2_0$  de los modelos con  $\beta = \{36/12, 40/12, 44/12, 46/12\}$ .

Podemos preguntarnos si la situación de la figura 7.22 sería distinta si se hubiesen corregido los errores refractivos de los ojos, ya que entonces habría menores variaciones de desenfoque en las muestras y la LSSF crecería más lentamente. En las refracciones

subjetivas se usan pasos de 0.25 D en las lentes de prueba, ya que con pasos menores no se producen cambios perceptibles. Además, con aberraciones de alto orden la corrección esférico-cilíndrica que causa la mejor calidad de imagen no es la que lleva los modos de desenfoque y astigmatismo de la aberración a cero (Guirao y Williams 2003). Esto provoca que en muestras de ojos con los errores refractivos corregidos el coeficiente de desenfoque estimado con un HS tenga  $\sigma_a \sim 0.25$  D (Thibos et al. 2002c). Por tanto, si se corrigen los errores refractivos,  $\sigma_a$  será del orden de 0.25 D. Habría estudiar si con esta  $\sigma_a$  los ajustes de las leyes de potencias son significativos. Presumiblemente sí, pues es difícil pensar que las leyes de potencias alcancen un mejor acuerdo con los datos que el que del modelo de desenfoque en la figura 7.21, cuyos ajustes son significativos.



**Figuras 7.23:** Parámetro tau de las componentes  $u=\{x, y\}$  de G1 LE y G1 RE. Las curvas a rayas son lorentzianas del modelo de desenfoque con los parámetros de los ajustes de las LSSF y TSSF. Las curvas continuas están ligadas a leyes de potencias con  $\beta = 36/12, 40/12, 44/12$  (de mayor espesor) y  $46/12$ .

En la figura 7.23 se representan los parámetros tau experimentales de las componentes  $u=\{x, y\}$  de los centroides de los conjuntos de ojos G1 LE y G1 RE, junto

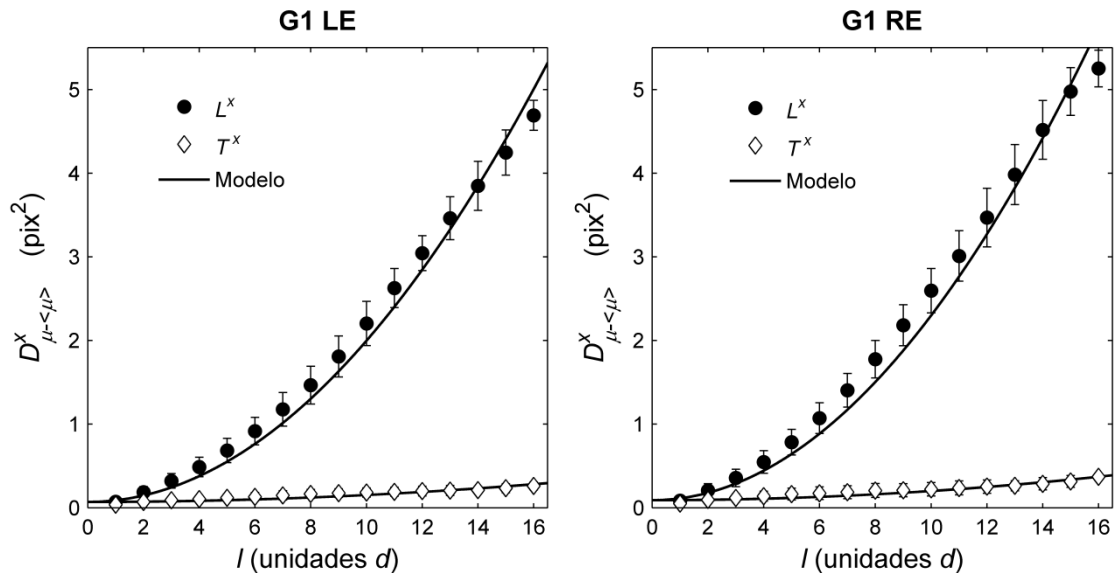
con las curvas teóricas ligadas a los modelos de fluctuaciones de desenfoque y de leyes de potencia. El decaimiento de los parámetros con  $l$  se corresponde mucho mejor con la predicción del modelo de desenfoque, ya que las leyes de potencias predicen un crecimiento de los mismos. Se observa, no obstante, cierta tendencia en las dos componentes de los dos grupos de ojos que consiste en que el parámetro experimental toma valores menores que la predicción del modelo de desenfoque para bajas separaciones  $l$  y toma valores mayores para altas  $l$ . Estas diferencias son consecuencia de los comportamientos observados para la LSSF y la TSSF.

### 7.2.2 Modelo de fluctuaciones de desenfoque y astigmatismo

Dado que los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a los datos de las funciones de estructura son significativos, refinamos el modelo incluyendo también las fluctuaciones de los astigmatismos. A partir de (5.51) y (5.52) se obtiene el siguiente modelo para ajustar a los datos experimentales de las funciones de estructura:

$$L_{\mu}^u(l) = q_1 l^2 + q_2; \quad T_{\mu}^u(l) = q_3 l^2 + q_2 \quad (7.1)$$

En el modelo (5.58) ya se permitía un valor diferente para el parámetro  $q_1$  de cada componente  $u$ . La novedad que incorpora (7.1) es la inclusión de  $q_3$ .



**Figura 7.24:** Ajustes de las expresiones (7.1) del modelo de fluctuaciones de desenfoque y astigmatismo a las LSSF y las TSSF de la componente  $u = x$  de los conjuntos de ojos G1 LE y G1 RE.

La figura 7.24 muestra los ajustes de las predicciones teóricas del modelo de desenfoque y astigmatismos a las funciones de estructura de la componente  $x$  de los grupos G1 LE y G1 RE. La tabla 7.10 recoge los resultados de los ajustes para las dos



componentes. La inclusión de la dependencia parabólica para la TSSF hace que las pruebas de chi cuadrado sean no significativas para las dos muestras de ojos usadas.

Conjunto	$u$	$q_1^{1/2}$ (D)	$q_3^{1/2}$ (D)	$\chi^2_\nu$	$P$
G1 LE	$x$	$0.727 \pm 0.009$	$0.15 \pm 0.01$	0.65	0.929
	$y$	$0.70 \pm 0.01$	$0.18 \pm 0.01$	0.92	0.588
G1 RE	$x$	$0.78 \pm 0.01$	$0.17 \pm 0.01$	0.68	0.904
	$y$	$0.63 \pm 0.01$	$0.20 \pm 0.02$	0.70	0.887

**Tabla 7.10:** Resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque y astigmatismo a las funciones de estructura de los conjuntos de ojos G1 LE y G1 RE.

## 7.3 Discusión

En esta sección se revisan los métodos presentados en el capítulo 5, se comenta su aplicación en la tesis a la caracterización de la estadística espacial de las aberraciones oculares y se discuten los resultados de dicho estudio.

### 7.3.1 Métodos propuestos basados en los centroides

Los métodos del capítulo 5 permiten evaluar si una propuesta de modelo de la estadística espacial de las aberraciones es compatible con el comportamiento observado en los desplazamientos de los centroides medidos con un HS. Los métodos se basan en el enfoque popperiano de la figura 5.1, sin considerar las etapas rodeadas por la línea de puntos. La idea es comparar, usando cierto criterio, las expresiones teóricas que el modelo de la aberración predice para diferentes magnitudes estadísticas de segundo orden de los centroides con las estimaciones experimentales de dichas magnitudes. Para ello se han de tener presentes los efectos del patrón de muestreo y del ruido del HS.

Para guiar la elección del candidato a modelo de las aberraciones, se propone usar los diagramas de centroides, definidos en la sección 5.2. Observando las nubes de puntos representadas en estas gráficas se obtiene información intuitiva sobre el grado de homogeneidad e isotropía de las aberraciones. Los diagramas incluso pueden sugerir un modelo de estadística. Así, si las aberraciones son homogéneas, si las subpupilas del HS son iguales, si sólo los momentos de segundo orden de los centroides son relevantes y si se desprecia la contribución del ruido, entonces todas las nubes tienen la misma forma y tamaño. Si, además, las aberraciones son isótropas y las subaperturas circulares o

cuadradas, entonces la dispersión de las nubes es la misma en todas las direcciones. En caso de que la aberración esté dominada por fluctuaciones de desenfoque, el ancho de las nubes en la dirección  $u$  (las varianzas de esa componente de los centroides) depende cuadráticamente de la coordenada  $u_n$  de las microlentes (apartado 5.4.2). Los diagramas de centroides también son útiles para detectar valores atípicos, al igual que las gráficas de las varianzas (apartados 5.5.2, 7.1.2a y 7.1.3a).

Las magnitudes estadísticas de los centroides que se utilizan son las varianzas, las funciones de estructura (SSF) y el parámetro tau. La sección 5.4 recoge las expresiones teóricas de estas funciones para dos estadísticas de la aberración: las leyes de potencias, cuyas ecuaciones fueron derivadas por autores de óptica atmosférica, y el modelo de fluctuaciones de desenfoque, cuyas expresiones son un resultado original de la tesis.

Es útil representar las varianzas de las componentes  $u = \{x, y\}$  de los centroides frente a las coordenadas  $x_n$  o  $y_n$  de las subpupilas para estudiar si hay alguna dependencia con ellas. Los modelos homogéneos de la aberración predicen varianzas constantes con la posición en pupila, mientras que los modelos isótropos predicen varianzas iguales para las dos componentes y el modelo de fluctuaciones de desenfoque predice dependencias cuadráticas con la posición. Para estudiar el comportamiento de los datos, se propone ajustar modelos con una dependencia cuadrática de las coordenadas y evaluar las estimaciones de sus parámetros. También se usa una prueba de cociente de verosimilitudes (subapartado 7.1.2b), que compara la probabilidad de que las varianzas sean constantes con la probabilidad de que su dependencia sea cuadrática.

La SSF es la magnitud estadística de los centroides preferida en la tesis. Posee ventajas sobre las varianzas y las autocorrelaciones: es insensible a los prismas y puede depender de la diferencia de las coordenadas de las microlentes para aberraciones no homogéneas (e. g., para el modelo de fluctuaciones de desenfoque). El apartado 5.3.1 muestra las expresiones que toman las SSF para aberraciones homogéneas o isótropas si las subpupilas del HS son iguales y cuadradas. En ese caso, las SSF dependen de la función de estructura de la aberración según integrales unidimensionales, que se particularizan para las leyes de potencias en el apartado 5.4.1. Para el modelo de fluctuaciones de desenfoque y microlentes cuadradas, se ha encontrado que la SSF de cada componente  $u$  depende del cuadrado de la separación de cada par de microlentes en esa dirección (apartado 5.4.2). A diferencia de las varianzas o las autocorrelaciones, las SSF del modelo de desenfoque son insensibles a movimientos transversales del ojo.

Se ha visto que, para los modelos de la sección 5.4 y subpupilas iguales y cuadradas, la SSF sólo depende del vector de separación entre cada par de microlentes. Esto permite estimar fácilmente sus valores experimentales con la ecuación (5.13), que requiere la no correlación de aberraciones y ruido y otras suposiciones adicionales sobre el ruido. Por simplicidad, las SSF no se calculan para todas las combinaciones posibles de pares de subpupilas, sino para las microlentes alineadas en paralelo o en perpendicular a la dirección de cada componente  $u$  de los centroides (se habla de LSSF o de TSSF, respectivamente). Si exceptuamos el caso del subapartado 5.4.2b), para los modelos de la sección 5.4 las LSSF de las dos componentes son iguales, al igual que las dos TSSF, lo que también sucede para aberraciones isótropas. Por último, la LSSF y la TSSF sólo dependen del módulo  $l$  del vector de separación entre microlentes para estos modelos, lo que hace que las funciones se evalúen fácilmente.

Para estudiar la SSF, se grafican la LSSF y la TSSF de cada componente  $u$  frente a  $l$ . Para cada  $l$  se representa el valor medio de la función para todos los pares separados por el mismo vector, mientras que las barras de error son la desviación típica de los mismos valores. Se realiza un ajuste por mínimos cuadrados ponderados de las predicciones del modelo de las aberraciones a los datos. Se emplea un solo ajuste por componente  $u$ , usando tanto la LSSF y la TSSF, al que se le aplica una prueba de chi cuadrado. Este es el criterio de comparación elegido (cf. la figura 5.1). Si la prueba es significativa, la propuesta no es compatible con los datos, por lo que se formula otra alternativa. En caso contrario, la propuesta es razonable para la incertidumbre existente.

La última magnitud es el parámetro tau ( $\tau$ ), definido en la ecuación (5.15). Este parámetro adimensional depende sólo de  $l$  en los mismos casos que la LSSF y la TSSF. Su expresión para las leyes de potencias está determinada por el exponente  $\beta$ , por lo que se evalúa para cada ley sin ningún ajuste, al igual que en las referencias de óptica atmosférica. Las expresiones del modelo de desenfoque requieren ajustes no lineales, por lo que se opta por representar el cociente de las predicciones de los ajustes de la TSSF y la LSSF. En las gráficas de  $\tau$  frente a  $l$  se compara la evolución de los datos y de las predicciones de los diferentes modelos. Como  $\tau$  es una transformación de las SSF, se prefiere aplicar el test de compatibilidad a los ajustes de la LSSF y la TSSF.

### 7.3.2 Ventajas frente al uso de magnitudes de la aberración estimada

Aunque el método propuesto omite la estimación de las aberraciones, es posible formular procedimientos popperianos análogos que usen magnitudes estadísticas de la

aberración estimada o de su desarrollo en polinomios de Zernike (Roggemann et al. 1994). Así se muestra en el esquema de la figura 5.1 cuando se incluyen las etapas rodeadas por la línea de puntos. Lo que no es aconsejable es comparar directamente las expresiones de la estadística de la aberración real con los valores obtenidos para las mismas magnitudes en el laboratorio. Por ejemplo, en el apartado 4.4.1 se han visto las transformaciones que introducen en el espectro de potencias de la aberración estimada el uso de un dominio espacial finito, la estimación de un número finito de modos, el *aliasing*, la propagación del ruido o el número finito de realizaciones. Algunas de estas fuentes de error son sistemáticas y no disminuyen al aumentar el número de medidas.

Aunque se formule correctamente un procedimiento popperiano basado en las magnitudes de la aberración estimada (incluyendo los cambios que sensor y estimación causan a la estadística de la aberración real), hay varias razones para preferir un método basado en los centroides (sección 5.1). En primer lugar, usar los centroides evita la pérdida de información que supone trabajar con los parámetros de la aberración estimada. En segundo lugar, las expresiones matemáticas son más sencillas, ya que no se incluye la transformación ligada a la estimación, que además hace la contribución del ruido menos intuitiva. En tercer lugar, se simplifica la comparación de resultados entre aberrómetros diferentes, ya que la estadística de la aberración estimada depende de la matriz de estimación  $\mathbf{R}$  elegida o del número  $M$  de modos reconstruidos. Además, magnitudes como el parámetro tau o resultados como los de las pruebas de chi cuadrado no dependen de las unidades utilizadas, por lo que es posible trabajar con ellas sin especificar la focal  $f$  o el lado  $d$  de las microlentes.

### 7.3.3 Limitaciones y desventajas de los métodos propuestos

El método propuesto también tiene sus limitaciones y desventajas. Por ejemplo, el procedimiento es válido en la medida en que lo sean las suposiciones empleadas en su derivación. Las suposiciones más básicas están ligadas al modelo de sensor y al ruido. El modelo de HS usado es la expresión (2.26), donde se considera cada microlente del patrón por separado y se supone que la irradiancia en cada subpupila es constante. Este modelo complica la introducción del *speckle*, que provoca cambios aleatorios en la distribución de irradiancia. Las suposiciones relativas al ruido son la aditividad de (2.33), la no correlación entre aberraciones y ruido y las suposiciones adicionales del modelo de (2.40). Se ha comentado que la no correlación entre aberraciones y ruido puede no ser adecuada en óptica ocular, debido a la posibilidad de que el ruido crezca

en presencia de aberraciones. La suposición de no correlación es clave a la hora de estimar la SSF experimental con las ecuaciones (5.12) o (5.13).

La validez de los resultados obtenidos también depende de la exactitud del algoritmo utilizado para estimar las posiciones de los centroides a partir de las imágenes de la cámara del sensor. En esta tesis se ha utilizado el procedimiento de umbralización, descrito por la ecuación (2.31) y cuya implementación se recoge en el apartado 6.2.3.

La dependencia del modelo de HS usado con la forma de las subaperturas obliga a evaluar muchas de las expresiones del capítulo 5 para un tipo de subpupilas. En la tesis se usan mayoritariamente microlentes cuadradas. Si las subpupilas del HS disponible tienen otra forma, se deben recalcular las expresiones en las que se haya particularizado este factor. El uso de otros sensores de gradiente también puede requerir recalcular muchas de las ecuaciones presentadas. Para el SRR habría que considerar subpupilas circulares o cuadradas en el modelo de sensor, mientras que para el LRT la distribución de irradiancia de las subpupilas sería la del haz, típicamente gaussiana (Bará 2007).

Respecto a los diagramas de centroides, la información que dan es cualitativa, por lo que conviene completar el estudio usando las magnitudes de segundo orden de los centroides y realizando pruebas estadísticas sobre ellas. Además, como se vio para algunos ojos de Londres, no son siempre fáciles de interpretar.

Otra limitación es que algunas expresiones derivadas para la SSF, en especial las del apartado 5.3.1, requieren que el modelo de estadística de las aberraciones propuesto sea homogéneo. Tampoco está garantizado que la SSF dependa de la diferencia entre los vectores de posición de cada par de microlentes para cualquier modelo de estadística, aunque la SSF presenta dicha dependencia para más modelos que la autocorrelación. Si esta dependencia no se produce, la evaluación de la SSF se complica, aunque no se imposibilita. En el apartado 5.4.2 se ilustró cómo hallar las expresiones analíticas de las SSF de modelos dominados por las fluctuaciones de polinomios de Zernike de segundo orden. También se comentó que si se incluyen modos de órdenes  $n > 2$ , entonces no está garantizado que la LSSF y la TSSF sólo dependan de la separación  $l$  entre subpupilas.

El método también posee desventajas frente a los procedimientos popperianos basados en el uso de magnitudes estadísticas de la aberración estimada. Así, los coeficientes de Zernike estimados presentan la información de la estadística espacial de forma más intuitiva y familiar, lo que facilita el análisis y la interpretación de los

resultados. Además, aunque en la estimación de estos coeficientes disminuya la cantidad de información, se puede argumentar que la reducción es mucho más pequeña que la que se produce al estimar los centroides a partir de las imágenes del HS.

Hay que tener presente que el método propuesto no formula por sí solo propuestas de estadísticas de la aberración, aunque sí informa sobre sus propiedades. Si el modelo es homogéneo, lo más conveniente para aplicar el proceso de falsación descrito es formular la propuesta de modelo en términos de la función de estructura de la aberración. Si es necesario, los métodos del apartado 3.1.2 permiten hallar los momentos de los coeficientes de Zernike a partir de la función de estructura. El proceso presentado tampoco analiza el origen fisiológico de las fluctuaciones de las aberraciones, lo que quizá requiera del uso de modelos de ojo personalizados.

#### **7.3.4 Aplicación de los métodos al caso ocular**

Parte de los métodos del capítulo 5 han sido usados previamente en óptica atmosférica. La aplicación en esta tesis de los procedimientos al estudio de la estadística espacial de las aberraciones oculares da pie a varias observaciones. La primera es que los métodos se pueden utilizar tanto con la estadística de las aberraciones de ojos individuales (sección 5.5) como con la de poblaciones de ojos (sección 7.2). En el primer caso nos interesan las variaciones espaciales de la aberración de un ojo a lo largo de una serie temporal de medidas tomadas con un HS. En el segundo, nos centramos en las variaciones de la aberración en un grupo de ojos con ciertas características.

A diferencia del caso atmosférico, en la aplicación a la óptica ocular es clave referir los desplazamientos de los centroides a su valor esperado en cada localización de la pupila ocular. La causa es que el valor medio de la aberración ocular es diferente en cada posición en la pupila, lo que es especialmente relevante al trabajar con ojos individuales. Recuérdese que los modelos homogéneos sólo son propuestas razonables de estadística para procesos con valores esperados constantes.

Otra característica del caso ocular es que el ojo se halla en continuo movimiento. Como nos interesa caracterizar la estadística de la aberración en distintas posiciones en la pupila ocular, es importante conocer el valor de estos movimientos para tenerlos en cuenta en el estudio. En la tesis nos centramos en las traslaciones transversales, ya que su seguimiento es sencillo y se puede realizar usando las imágenes de la cámara del sensor. El número y tamaño finito de las microlentes disponibles y la necesidad de

obtener un número suficientemente alto de medidas de los centroides en cada localización considerada limitan la exactitud del algoritmo de seguimiento ocular empleado. En particular, proponemos un método de seguimiento con una incertidumbre del orden de la separación  $L$  entre microlentes (apartados 5.5.1, 6.2.2 y 6.3.1) y, por tanto, más conveniente para patrones con alta densidad de subpupilas.

Otro factor importante al aplicar los métodos del capítulo 5 es la estimación adecuada de los niveles de ruido. Si se supone que el ruido es de valor medio cero (i. e., se desprecian los errores sistemáticos mencionados en la sección 2.3), entonces sólo se necesita estimar los momentos de segundo orden. En la tesis se descarta la influencia del ruido en el estudio de las poblaciones de ojos, debido a que los desplazamientos de los centroides de cada ojo se obtienen promediando los valores de su serie temporal y debido a la alta SNR. Para los ojos individuales se han de estimar experimentalmente los valores de los momentos del ruido en condiciones similares a las presentes en la medida de las aberraciones oculares. Idealmente se han de emplear series de medidas tomadas con ojos artificiales estáticos, usando en la cámara los mismos parámetros (tiempos de adquisición, ganancia, etc.) y niveles de irradiancia que con los ojos reales.

Otro problema es la presencia de los parpadeos en las series largas. En la tesis se opta por detectarlos manualmente inspeccionando las imágenes del sensor. A diferencia de lo que ocurre con algunos estudios de dinámica temporal que usan análisis de Fourier, la eliminación de las medidas ligadas a parpadeos no tiene repercusión para nuestro método. Tampoco la tiene el descarte, esta vez automático, de las medidas en las que parte de la región de interés de la pupila ocular cae fuera de la cámara.

Los estudios de ojos individuales están incompletos si no se analizan los cambios temporales de la estadística espacial de las aberraciones, i. e., su estadística espaciotemporal. Una vía para abordar esa tarea consiste en dividir una serie temporal larga en fragmentos y en aplicar los métodos presentados a cada uno de ellos. Se consigue así que el estudio de la estadística espacial tenga cierta resolución temporal.

### **7.3.5 Diferencias entre las dos muestras de ojos utilizadas**

La aplicación de los métodos del capítulo 5 se realizó en dos etapas. En un estudio preliminar, las técnicas se usaron para analizar la estadística de las aberraciones de dos ojos individuales. Las medidas se tomaron en el laboratorio de Salvador Bará con el montaje y los procedimientos descritos (apartado 5.5.2). El objetivo era demostrar la

posibilidad de utilizar los métodos en esa aplicación y adquirir la preparación necesaria para estudiar conjuntos de ojos más grandes. El grupo de Luis Diaz-Santana tomó los datos de la muestra principal de ojos (capítulo 6). Los métodos de la tesis se aplicaron al estudio de la estadística individual y poblacional de las aberraciones de esa muestra.

Los dos HS usados en la tesis tienen diferencias notables. Así, las microlentes del HS de Santiago son más grandes ( $d=0.564$  mm frente a  $0.270$  mm) y su focal es mucho más elevada ( $z=51.8$  mm frente a  $8.0$  mm). Respecto a los parámetros de las cámaras, el tamaño de píxel es el doble de grande para el HS de Santiago ( $21.76$  micras frente a  $11.4$  micras), mientras que las frecuencias de adquisición son similares ( $20$  Hz frente a  $24$  Hz). Como se comentó en el subapartado 7.1.2a), la focal mucho más pequeña del HS de Londres le otorga un mayor rango dinámico, propiedad deseable para medir una muestra grande de ojos con las ametropías sin corregir. En cambio, el HS de Santiago es más sensible debido a: su elevada focal (que compensa con creces su mayor tamaño de píxel), el menor valor de la varianza estimada para su ruido (a pesar de que en la estimación de esta magnitud en el HS de Londres no se considera el *speckle*) y la utilización del mismo procedimiento de determinación de los centroides en los dos sensores. Las fuentes también son diferentes: la del HS de Santiago es un puntero láser de baja coherencia a  $0.633$   $\mu\text{m}$  y la de Londres un diodo láser a  $0.780$   $\mu\text{m}$ . La mayor coherencia de la segunda fuente hace que las medidas de Londres estén más afectadas por el *speckle*.

En los apartados 5.5.2 y 6.3.2 se comentan las estimaciones de las varianzas del ruido de los sensores. En el HS de Santiago se usó una serie larga de medidas ( $K=1797$ ) tomada con un ojo artificial, niveles de irradiancia similares a los de los ojos reales y los mismos parámetros en la cámara. La estimación realizada para el caso de Londres es menos fiable, ya que además de usar un número muy inferior de medidas ( $K=85$ ), no se incluye el *speckle*, que juega un papel mucho más relevante en este HS. En ambos casos los momentos experimentales muestran discrepancias con el modelo de la ecuación (2.40). La desviación típica del ruido estimada es similar en los dos sensores:  $\sim 0.1$  pix.

Hay otras diferencias entre los datos y los análisis de Santiago y Londres que están relacionadas con las propiedades de los ojos medidos o con diferentes decisiones tomadas. Así, para los dos ojos de Santiago se estudian los centroides cuyas subpupilas están contenidas en una pupila circular de radio  $R_p=2.15$  mm. En cambio, el mayor tamaño de las pupilas oculares de Londres permite usar  $R_p=2.80$  mm y  $2.45$  mm. Por



otro lado, mientras que las series de medida de Santiago son largas,  $\sim 1$  min, las de Londres presentan una duración variable y son en algunos casos de  $\sim 5$  s, menores de lo deseable. Otra diferencia es que con los ojos de Londres se realizó un seguimiento de la pupila, pero no con los de Santiago. Como se comenta en el apartado 6.2.2, muchas de las personas de la muestra principal de ojos no estaban habituadas a estas medidas y la estabilización de la cabeza en el sensor de Londres consistía simplemente en un reposo para la barbilla. Por ello, en algunas series hay movimientos importantes de la pupila. Además, el menor tamaño de sus microlentes hace que el método de seguimiento propuesto sea más apropiado para este HS que para el de Santiago. Es más, en el apartado 5.5.2 se presentaron los resultados de los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las varianzas de los centroides de los ojos A y B. Se vio que las predicciones de sus descentramientos promedio son pequeñas (menores que  $L$ ) si a los centroides se les sustraen los efectos de los prismas, por lo que se espera poco beneficio como resultado de la aplicación del método de seguimiento a los ojos de Santiago.

### 7.3.6 Resultados obtenidos con ojos individuales

De entre los diferentes comportamientos observados, empezamos mencionando a los ojos cuya estadística es compatible con fuertes fluctuaciones del desenfoque, ligadas a una acomodación no estable. Esto sucede para la serie del ojo A (apartado 5.5.2) y la serie completa de E1G2 (la figura 7.8 muestra sus SSF). El diagrama de centroides de estas dos series tiene una clara disposición radial (figura 5.11) que se corresponde con las predicciones del modelo de fluctuaciones de desenfoque. Además, las varianzas de cada componente  $u$  dependen cuadráticamente de las coordenadas  $u_n$  de las subpupilas, con altos  $R^2$ . Los ajustes del modelo de desenfoque a las SSF no son significativos y predicen valores de  $\sigma_a$  muy altos para ambas componentes,  $\sim 0.20$  D. Por último, los ajustes de las cuatro leyes de potencias consideradas a las SSF son significativos.

Un segundo comportamiento es el de los ojos cuya estadística es compatible con fluctuaciones moderadas de desenfoque. Así ocurre para la serie del ojo B y las primeras  $K=380$  medidas válidas de E1G2, E2G2 y E3G2. Los diagramas de centroides de estos ojos no muestran con tanta claridad las características predichas por el modelo de desenfoque, sobre todo en relación con el caso anterior. Así, al comparar los diagramas de los ojos A y B (figura 5.11), se observa que la no homogeneidad y no isotropía del primer ojo es mucho mayor. En los diagramas de E1G2, E2G2 y E3G2 sólo la forma alargada de algunas nubes de la periferia sugiere el modelo de desenfoque

(figura 7.1). Como se comenta en el subapartado 7.1.2a), es posible la menor SNR del HS de Londres aumente la apariencia de homogeneidad e isotropía de estos diagramas. Además, la alta densidad de subpupilas de este HS impide aplicar aumentos  $Q$  mayores. Respecto a las varianzas de las componentes de los centroides, también dependen cuadráticamente de las coordenadas correspondientes de las subpupilas, pero ahora los coeficientes  $R^2$  de esos ajustes son moderados o bajos. Respecto a las SSF, las TSSF no varían con la separación  $l$  entre microlentes, mientras que las LSSF crecen con  $l$ , aunque menos que para el comportamiento anterior. Los ajustes del modelo de desenfoque tampoco son significativos y estiman  $\sigma_a \sim 0.10$  D. Por su parte, los ajustes de las leyes de potencias no son significativos en algunos casos y sí en otros. Para altos exponentes ( $\beta \sim 4$ ), las mayores discrepancias entre las leyes de potencias y los datos se producen en las TSSF para  $l$  bajos: mientras que las curvas teóricas decaen conforme  $l$  disminuye, los datos se mantienen constantes. En cambio, para exponentes pequeños ( $\beta \sim 3$ ) estas variaciones de la TSSF tienen lugar en valores de  $l$  más bajos y son menos relevantes para la prueba de chi cuadrado. En estos casos las mayores diferencias suceden en las LSSF para  $l$  altos: las predicciones no reproducen el crecimiento experimental con  $l$ . Estas dos discrepancias y los valores de las varianzas de las SSF explican que en algunos casos los ajustes de las leyes sean mejores con exponentes bajos (e. g., para la componente  $u = y$  de E1G2 y E2G2), mientras que en otros casos son mejores con exponentes altos (e. g., para  $u = x$  en E1G2 o  $u = y$  en el ojo B). El modelo de fluctuaciones de desenfoque, con la inclusión de  $q_2$ , describe mejor los datos de la SSF que las leyes de potencias, como indican las  $P$  más altas de las pruebas de chi cuadrado. La no significatividad de algunas leyes de potencias se debe en gran parte a las altas varianzas de los datos.

Un tercer comportamiento es el de los ojos donde la estadística observada para cada componente  $u$  es compatible con fluctuaciones muy diferentes del desenfoque. Un ejemplo es E2G1. Para él, las varianzas de  $u = x$  siguen una parábola con un fuerte crecimiento, pero no así las varianzas de  $u = y$  (el cociente de verosimilitudes no rechaza la hipótesis de que sean constantes). Además, el crecimiento de la LSSF de  $u = x$  con  $l$  es mucho mayor que el de la LSSF de  $u = y$ . Presumiblemente este comportamiento se debe a las fluctuaciones de modos sin simetría rotacional, como los astigmatismos.

Un cuarto grupo es el de los ojos cuya estadística es compatible con fluctuaciones débiles de desenfoque o que muestra características que el modelo de desenfoque no explica. Ejemplos de estas situaciones son E4G2, E1G1, E3G1 y E4G1. E4G2 es un

ejemplo de caso compatible con fluctuaciones débiles de desenfoque. Así, su diagrama de centroides sugiere que el grado de no homogeneidad y no isotropía de su estadística no es muy elevado. Aunque sus varianzas dependen cuadráticamente de las posiciones en pupila (los cocientes de verosimilitudes rechazan que las varianzas sean constantes), los  $R^2$  son moderados. Respecto a sus SSF, la LSSF y la TSSF toman valores próximos en todo el rango de separaciones  $l$  y las altas varianzas de estos datos plantean dudas sobre el crecimiento de la LSSF con  $l$ . En relación con E4G1, su estadística es compatible tanto con una aberración homogénea e isótropa como con un modelo de fluctuaciones muy débiles de desenfoque. Así, sus varianzas varían muy suavemente con la posición en pupila y sus LSSF y TSSF son similares en todo el rango de separaciones y se mantienen constantes. Una situación distinta es la de los ojos E1G1 y E3G1. En ellos, lo más llamativo es que las varianzas de sus centroides dependen de la posición de modo diferente a lo predicho por los modelos homogéneos o el de desenfoque. En general, las LSSF y las TSSF de los ojos de este cuarto grupo son iguales y prácticamente constantes en el rango de separaciones (aunque las SSF de las dos componentes pueden tomar valores diferentes, como ocurre para E1G1 y E3G1). En la gran mayoría de casos, los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque (bien por mínimos cuadrados ordinarios o restringidos) no son significativos. Los ajustes de las leyes de potencias son significativos para algunos exponentes y no lo son para otros. En particular, se observa que los ajustes son mejores cuanto menor es el exponente, con  $3 \leq \beta < 4$ . Esto se debe a que la LSSF experimental apenas crece con  $l$ , por lo que la mayor discrepancia entre predicciones y datos sucede para la TSSF a bajos  $l$ . Al igual que para los ojos con estadística compatible con fluctuaciones moderadas de desenfoque, el modelo de desenfoque describe mejor las SSF experimentales que las leyes de potencias.

Es importante recalcar que los buenos ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a la SSF se producen porque en (5.58) se modificó la predicción teórica al introducir la constante  $q_2$  en la LSSF y la TSSF. Si la contribución del ruido a las SSF se descontase adecuadamente y si en la aberración real sólo hubiese fluctuaciones de desenfoque, entonces  $q_2 = 0$ . En cambio, los valores estimados para esta constante son muy relevantes, sobre todo en los ojos de Londres. Se han mencionado varias posibles causas. Existe la posibilidad de que se haya estimado erróneamente la contribución del ruido a las SSF, bien por la incorrección del modelo de ruido o por la subestimación de sus varianzas. El origen también puede estar en las fluctuaciones de las aberraciones de

alto orden, que generarían contribuciones relevantes a las SSF, pero con dependencias débiles con  $l$ . Eso explicaría por qué las LSSF y las TSSF de muchos ojos se mantienen constantes con  $l$ . Otra posibilidad es que el valor de  $q_2$  se deba en parte al *speckle*.

En el subapartado 7.1.2d) se comprobó que los valores de  $q_2$  presentes influyen en el comportamiento de los datos de los parámetros tau para altas separaciones  $l$ . En general, el modelo de desenfoque explica de nuevo mejor los valores experimentales de  $\tau$  que las leyes de potencias. En los ojos de Londres, la LSSF y la TSSF tienden a ser iguales para bajos  $l$ , por lo que  $\tau \sim 1$  y toma valores mayores que los predichos por las leyes de potencias. Para altos  $l$ ,  $\tau$  decae si las fluctuaciones de desenfoque son elevadas y  $q_2$  es moderado en comparación. Este comportamiento se opone al crecimiento de las curvas teóricas de las leyes de potencias con  $l$ . En caso contrario,  $\tau$  decae ligeramente con  $l$  o  $\tau \sim 1$ , una evolución más próxima a la de las leyes de potencias. En los ojos de Santiago se observa que los parámetros decaen siguiendo la predicción del modelo de desenfoque para  $l$  medios y altos, pero para  $l$  bajos se desvían de ese comportamiento.

La inclusión de  $q_2$  en los ajustes de las predicciones de las SSF pone de relieve que el modelo de fluctuaciones de desenfoque del apartado 5.4.2 es muy simple y con frecuencia necesita modificaciones para explicar los datos. Esto también ocurre con las predicciones del modelo para las varianzas de los centroides. Incluso en casos en los que las varianzas dependen cuadráticamente de la posición en pupila, en ocasiones se ha de recurrir a las fluctuaciones de otros modos para explicar ciertos comportamientos, como la posición del mínimo de las parábolas ajustadas. Así sucede por ejemplo con las fluctuaciones de prisma, a las que las varianzas son sensibles. Se ha propuesto un método simple para disminuir la influencia de los prismas en los diagramas de centroides y en las gráficas de las varianzas que consiste en sustraer a las posiciones de los centroides de cada realización su promedio entre todas las microlentes consideradas.

Como muestran los diferentes tipos de comportamientos mencionados en este apartado, en las distintas series se han encontrado niveles muy variados de cambios en la acomodación. El hecho de que las predicciones de todas las leyes de potencias consideradas sean significativas para los ojos con fluctuaciones fuertes del desenfoque (ojos A y serie completa de E1G2) indica que estos modelos no reproducen toda la gama de comportamientos experimentales. En algunos casos, son necesarios modelos que tengan una contribución más relevante del desenfoque. Además, se ha visto que incluso en ojos con fluctuaciones más moderadas de desenfoque existen varias

propiedades de las magnitudes estadísticas de los centroides que no son explicadas adecuadamente por ninguna de las leyes de potencias.

Se comenta ahora el uso de la prueba de chi cuadrado con los ajustes de la SSF. Se ha visto que en los ojos en los que el crecimiento de la LSSF con  $l$  es moderado o débil la prueba es no significativa tanto para el modelo de desenfoque como para algunas leyes de potencias. Aunque la calidad de los ajustes de los modelos se puede comparar usando las  $P$  de sus pruebas, esta situación no es deseable, sobre todo teniendo presente que los dos tipos de modelo son muy distintos. Una prueba no significativa implica que el modelo propuesto es compatible con los datos para el nivel de incertidumbre existente. Esa incertidumbre está recogida por las varianzas de los datos [cf. (5.59)]. Esas varianzas son altas en comparación con los valores que toman las SSF en muchos de nuestros ojos y hacen que ajustes que no describen bien los datos, las leyes de potencias, no sean significativos. Si las varianzas fuesen menores, la prueba sería más exigente y rechazaría más modelos. La incertidumbre en los datos de Londres se podría reducir usando una fuente más coherente, que disminuiría el *speckle*. Además, si se corrigiesen los errores refractivos se podrían usar microlentes de focal más larga, como en el HS de Santiago, para aumentar la magnitud de las fluctuaciones de los centroides frente al ruido (recordando que el tamaño de los *spots* y el ruido varían con el tamaño y la focal de las subpupilas). Nótese que para los ojos B y E4G2 los ajustes del modelo de fluctuaciones de desenfoque a las SSF estiman  $\sigma_a$  similares en la aberración. A pesar de ello, las pruebas de chi cuadrado de las cuatro leyes de potencias consideradas son significativas para el ojo B, mientras que sólo  $\beta = 46/12$  es significativo para E4G2. Esto es un indicio de que la significatividad de la prueba depende de la SNR del sensor usado. También se pueden modificar los test para hacerlos más exigentes. Por ejemplo, como las leyes de potencias predicen que las LSSF y las TSSF de las dos componentes de los centroides son iguales, se podría realizar un solo ajuste y un solo test para las cuatro funciones, forzando la estimación del mismo factor multiplicativo en ellas. Esa prueba sería más exigente en ojos con comportamientos distintos para cada componente. Por último, conviene no apoyarse sólo en la prueba de chi cuadrado, sino también en la información proporcionada por los diagramas y las varianzas de los centroides.

Aunque los diferentes ojos presentados se han agrupado por edades, es posible que los errores refractivos sean un factor más importante a la hora de explicar algunos de los comportamientos. Las ametropías se dejaron sin corregir, lo que implica que las

demandas de acomodación son diferentes para cada persona. Así, ha de tomarse con precaución el hecho de que, por ejemplo, una mayor fracción de ojos jóvenes presente fluctuaciones importantes del desenfoque. Dado que sólo se dispone de una serie temporal por ojo medida con el estímulo visual a una vergencia fija, no es posible usar los datos aberrométricos disponibles para estimar la respuesta acomodativa promedio, magnitud de la que dependen las fluctuaciones de acomodación (sección 4.2).

### 7.3.7 Resultados obtenidos para poblaciones de ojos

En la sección 7.2 se aplicaron los métodos del capítulo 5 al estudio de la estadística poblacional de un grupo de ojos medidos en Londres. Debido al tamaño muy reducido de la muestra de ojos jóvenes y a la conveniencia de realizar el análisis por separado para cada tipo de ojo, se estudió solamente la estadística de los ojos izquierdos y derechos del grupo G1 de mayor edad con diámetros de pupila de al menos 4.9 mm. Se usaron  $K=18$  ojos izquierdos y  $K=18$  derechos. El pequeño tamaño de los conjuntos puede afectar a algunas características de las magnitudes estadísticas experimentales.

En este estudio se desprecia el efecto del ruido del HS debido a las importantes variaciones de los centroides que tienen lugar entre ojos y al promediado temporal realizado usando la serie de cada ojo. También se ha señalado que para representar los diagramas de los centroides y las gráficas de las varianzas se sustraen los prismas usando el método propuesto en la tesis. Los prismas ejercen una mayor influencia en estas gráficas que para el caso de los ojos individuales.

Los diagramas de centroides muestran un alto grado de no homogeneidad y sugieren que la aberración está dominada por el desenfoque. Por su parte, las varianzas de cada componente  $u$  dependen parabólicamente de las coordenadas  $u_n$  de las microlentes. Además, las curvas teóricas de las SSF predichas por el modelo de fluctuaciones de desenfoque capturan el comportamiento básico de los datos. No obstante, las pequeñas varianzas de las SSF experimentales hacen que los ajustes de las dos componentes de los dos grupos de ojos sean significativos al 5 %. Por su parte, los ajustes de las leyes de potencias describen mal los datos y son significativos al 1 %. Como se comenta en la sección 7.2, existe la incógnita de si las pruebas de las leyes de potencias serían significativas si se hubiesen corregido los errores refractivos. Dadas las bajas varianzas de los datos de las SSF y teniendo presente que parece difícil que los ajustes de las leyes de potencias alcancen el nivel de acuerdo mostrado por el modelo de

fluctuaciones de desenfoque en las figuras 7.21, en donde hay significatividad, pensamos que las leyes de potencias también serían significativas en este otro caso.

Debido a la significatividad del modelo de desenfoque, en la ecuación (7.1) se modifica la expresión teórica de la TSSF permitiendo que varíe con el cuadrado de  $l$  a través de una constante  $q_3$  distinta de la  $q_1$  de la LSSF. Esta modificación se hace en consonancia con las expresiones teóricas del subapartado 5.4.2b), que incluyen la contribución de las fluctuaciones de astigmatismo. La modificación es suficiente para hacer que todos los ajustes sean no significativos. Estos resultados indican que el método, al menos para el HS usado y la muestra de ojos medida, es muy poco sensible a las variaciones de los modos de alto orden de la aberración. Nótese que como en el modelo sólo se consideran modos de orden  $n = 2$ , es de esperar que el ajuste de sus predicciones para las SSF les otorgue a las varianzas y correlaciones de estos modos un mayor peso que el existente en la estadística de la aberración real [cf. las ecuaciones (5.51) y (5.52)]. Esto podría explicar en parte las diferencias entre las estimaciones de  $\sigma_a$  usando los ajustes de las SSF y las obtenidas con los coeficientes de Zernike estimados. Por tanto, los buenos ajustes obtenidos para el modelo de desenfoque y astigmatismos no implican que las fluctuaciones de las aberraciones de alto orden tengan una contribución despreciable a las curvas experimentales de la LSSF y la TSSF. Lo que sí se produce es que su contribución no es lo suficientemente fuerte, en comparación con las varianzas de los datos, para romper la dependencia parabólica asociada a los modos con  $n = 2$ . Finalmente, señalar que los datos del caso poblacional son robustos ante factores como el ruido, el *speckle* o los movimientos oculares. Ante este hecho, la vía más clara para mejorar la significatividad de los experimentos sería modificar la focal del patrón de microlentes.

### 7.3.8 Trabajo futuro

Existen diferentes cuestiones relacionadas con el tema principal de la tesis que permanecen abiertas o sobre las que se necesita profundizar más. La más relevante es la necesidad de formular modelos más adecuados de la estadística espacial de las aberraciones oculares partiendo de primeros principios, tanto para los ojos individuales como para las poblaciones de ojos con visión normal. Las leyes de potencias no describen satisfactoriamente el comportamiento de las funciones de estructura experimentales, pese a la no significatividad de las pruebas de chi cuadrado de algunos exponentes en el caso de las series temporales. Por su parte, el modelo de fluctuaciones

de desenfoque no proporciona información acerca de las variaciones de los modos de alto orden.

Sería interesante comprobar en qué medida el *speckle* influye en los resultados obtenidos para los ojos individuales de Londres. Para ello, habría que realizar un estudio con un número suficiente de ojos usando una fuente de menor coherencia. En relación con la estadística poblacional, también sería conveniente aplicar los procedimientos de la tesis a muestras de ojos más grandes que las aquí usadas a fin de estimar con mayor exactitud las magnitudes estadísticas de los centroides.

Otros temas sobre los que habría que indagar más en profundidad son la sensibilidad del método a las fluctuaciones de los modos de alto orden de la aberración ocular y la significatividad de la prueba de chi cuadrado, tanto en la situación individual como en la poblacional. Se deberían explorar las vías mencionadas en esta sección para reducir la incertidumbre en los datos del test.

En general, se debería investigar más acerca del modelo de ruido usado, que en este trabajo es muy básico, acerca de la correcta estimación de los momentos del ruido en presencia de aberraciones oculares y sobre la influencia del proceso de estimación de los centroides a partir de las imágenes del sensor.

Finalmente, habría que estudiar la propuesta realizada en esta tesis de fragmentar series temporales largas de ojos individuales y analizar la estadística espacial de cada fragmento, a fin de dotar a los estudios de cierta resolución temporal.



## Capítulo 8

# CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones de la tesis:

1. Se han revisado diferentes resultados de la literatura de las áreas de la aberrometría ocular y la óptica atmosférica que muestran que los coeficientes de Zernike estimados con un sensor de frente de ondas de gradiente se ven afectados por un sesgo y por la propagación del ruido. El sesgo depende del instrumento de medida y de diferentes elecciones del investigador y hace que la estadística de las aberraciones estimadas en el laboratorio no sea igual a la de las aberraciones reales. Por ello, es conveniente formular modelos teóricos de la estadística de la aberración a partir de primeros principios y disponer de procedimientos que estudien su compatibilidad con las medidas experimentales.

2. Se han realizado simulaciones numéricas para estudiar las consecuencias de no considerar las traslaciones transversales del ojo al estimar las aberraciones. La novedad de las simulaciones es la inclusión de los efectos de la estimación. Esto impide usar en los cálculos los coeficientes de Zernike estimados en el laboratorio, ya que se necesita modelar el comportamiento de órdenes más elevados. Los resultados muestran la aparición de pequeños sesgos (adicionales a los de la estimación) y un aumento de la variabilidad de los coeficientes de Zernike de bajo orden y del error cuadrático medio.

3. Se ha mostrado que los métodos utilizados por Cagigal et al. para afirmar que la estadística espacial de las aberraciones de la población de ojos con visión normal es homogénea y de Kolmogorov no son apropiados. Para ello, se han estudiado los efectos en el espectro de potencias de la aberración estimada de: la definición de la aberración estimada en una pupila finita, la estimación de un número finito de modos y el acoplamiento modal. Si no se tienen presentes las modificaciones que introducen estos factores en la expresión teórica del espectro de potencias, entonces modelos con estadísticas muy diferentes muestran comportamientos asintóticos en el espectro de

potencias experimental que pueden ser atribuidos incorrectamente al modelo de Kolmogorov. Las curvas obtenidas por Cagigal et al. pueden haber sido originadas por estadísticas con menos peso de las aberraciones de alto orden que el modelo de Kolmogorov, en sintonía con la matriz de covarianzas de los coeficientes de Zernike estimados de Thibos et al.

4. Se ha comparado el modelo de Kolmogorov con la estadística experimental observada por Thibos et al. en la matriz de covarianzas de los coeficientes de Zernike estimados. Para ello, se han usado los métodos del apartado 3.3.2 para comparar la matriz de Thibos con la matriz de coeficientes estimados que se obtendría para aberraciones reales de Kolmogorov y una configuración similar a la de Thibos et al. Los resultados muestran que la estimación acentúa el diferente ritmo de decaimiento de las varianzas de los modos con el orden radial para los dos modelos. También se ha estudiado el efecto que la estimación y el tamaño de la muestra de ojos tienen en las matrices de covarianzas de los coeficientes estimados cuando las aberraciones reales siguen el modelo de Kolmogorov o un modelo con modos no correlacionados y decaimiento de las varianzas similar al experimental. La combinación de los dos factores puede ocultar de manera más efectiva diferentes aspectos de la matriz de covarianzas.

5. Se ha propuesto un método popperiano que permite estudiar la compatibilidad de modelos de la estadística espacial de las aberraciones con los centroides medidos por sensores Hartmann-Shack usando magnitudes estadísticas de segundo orden de dichos datos. Parte de los procedimientos fueron utilizados previamente por otros autores en óptica atmosférica, pero, que sepamos, es la primera vez que se aplican al caso ocular. El método evita la reconstrucción de la aberración y puede usarse con ojos individuales y con poblaciones de ojos. Ofrece varias ventajas frente a los procedimientos similares que se formulen usando magnitudes de la aberración estimada: evita la pérdida de información asociada a la estimación de los parámetros de la aberración, simplifica las expresiones matemáticas y facilita la comparación de resultados entre aberrómetros diferentes. En cambio, la interpretación de los resultados es menos familiar e intuitiva que la basada en coeficientes de Zernike de la aberración estimada.

6. El método propone calcular los valores experimentales de las funciones de estructura longitudinal y transversal de los desplazamientos de los centroides y compararlos con las predicciones teóricas de cada modelo usando una prueba de chi

cuadrado. A diferencia de la autocorrelación, la función de estructura es insensible a los prismas y puede depender de la diferencia de coordenadas de las subpupilas para aberraciones no homogéneas. También se calculan otras magnitudes como las varianzas de los centroides o los parámetros tau, que aportan información adicional.

7. Por sí solo, el método no propone a ningún candidato a describir la estadística. Para facilitar la elección de la propuesta y obtener información rápida e intuitiva de la estadística de la aberración, se propone emplear los diagramas de centroides. Los modelos candidatos usados en la tesis son las leyes de potencias y un modelo dominado por fluctuaciones de desenfoque y movimientos transversales de pupila. En el capítulo 5 se recogen el aspecto y las expresiones que adoptan los diagramas y las magnitudes estadísticas de los centroides para estos modelos. Muchas ecuaciones propias de las leyes de potencias se tomaron de artículos de óptica atmosférica, como indican las referencias del texto, mientras que las ecuaciones del modelo de desenfoque son originales.

8. En el caso ocular se han de considerar factores ausentes en el atmosférico. Así, que el valor esperado de la aberración ocular dependa de la posición en pupila hace que las propuestas de modelos homogéneos sólo sean razonables si se refieren los desplazamientos de los centroides a sus promedios entre realizaciones. Si las series de medida son largas, los fijadores no son expertos y no usan impresiones dentales, se puede optar por seguir a la pupila ocular. El número finito de subpupilas y la necesidad de poseer muchos datos para cada posición en la pupila limitan la exactitud del seguimiento. Por otro lado, los métodos propuestos son inmunes al descarte de medidas debido a los parpadeos. En la aplicación a ojos individuales, se ha de estimar el nivel de ruido usando series medidas con ojos artificiales y los mismos parámetros e irradiancia en la cámara que para ojos reales.

9. Se ha comprobado que los procedimientos presentados aportan información sobre la estadística espacial de las aberraciones oculares. Para ello, se han aplicado los métodos al estudio de dos conjuntos de ojos de personas con visión normal medidos con dos sensores. La primera muestra, de dos ojos, se usó en un estudio preliminar en el que se analizó la estadística de cada serie temporal. El segundo conjunto, de 53 ojos, es más amplio y se empleó tanto para estudiar la estadística individual como la poblacional.

10. Para el caso de ojos individuales, el modelo de fluctuaciones de desenfoque, con una modificación en sus predicciones, proporciona mejores ajustes a los datos de las

funciones de estructura de los centroides que las leyes de potencias. Estos ajustes estiman fluctuaciones de acomodación muy variadas, desde 0 D hasta  $\sim 0.20$  D. En la gran mayoría de casos los ajustes son no significativos (es decir, son compatibles con los datos), con independencia de las fluctuaciones de desenfoque estimadas. Las varianzas de los centroides de los ojos con estadística compatible con fluctuaciones moderadas o fuertes de desenfoque dependen cuadráticamente de las coordenadas de las microlentes, aunque a veces hay una fuerte variabilidad o influencia de los prismas. Se han propuesto un método sencillo para disminuir el efecto de los prismas y el uso de una prueba de cociente de verosimilitudes para discriminar entre la situación de varianzas constantes, compatible con aberraciones homogéneas, y la dependencia cuadrática. Los diagramas de centroides muestran claramente la disposición predicha por el modelo de desenfoque cuando las fluctuaciones de la acomodación son elevadas. Para fluctuaciones más moderadas las nubes no muestran cambios tan acusados en forma, tamaño y orientación, aunque su interpretación no siempre es fácil y puede estar condicionada por la relación señal-ruido del sensor.

11. Para el caso de ojos individuales, las predicciones de las leyes de potencias consideradas (con exponentes  $3 \leq \beta < 4$ ) no son compatibles con las funciones de estructura de los centroides de los ojos que presentan fuertes fluctuaciones de desenfoque. Por tanto, estas leyes no se corresponden bien con toda la gama de comportamientos de los datos. Para ojos con fluctuaciones más moderadas, donde la función de estructura longitudinal no crece tan rápidamente con la separación entre subpupilas, los ajustes son no significativos para algunos exponentes y significativos para otros. No obstante, la no significatividad se debe a las altas varianzas de los datos, ya que hay características experimentales que las leyes de potencias no reproducen. Si la función longitudinal crece débilmente, los mejores ajustes se producen para exponentes bajos ( $\beta \sim 3$ ).

12. Existen ojos con características que no explican correctamente ni los modelos homogéneos ni el de fluctuaciones de desenfoque. Así, en ciertos ojos las magnitudes estadísticas experimentales de cada componente de los centroides son compatibles con las predicciones del modelo de desenfoque, pero este estima fluctuaciones muy diferentes de esa aberración por componente. Esto se debe a la presencia de fluctuaciones de modos sin simetría rotacional, como los astigmatismos. En otros casos la dependencia de las varianzas con la posición en pupila no es bien explicada ni por el modelo de desenfoque, ni por los homogéneos, ni por los prismas.

13. En el caso poblacional los diagramas de centroides y las gráficas de las varianzas sugieren, tras sustraer las importantes contribuciones de los prismas, una estadística fuertemente no homogénea y dominada por el desenfoque. No obstante, aunque las predicciones de este modelo describen bien la evolución de los datos de las funciones de estructura, las bajas varianzas de esos datos llevan a la significatividad. Incluir fluctuaciones de astigmatismo, que permiten que la función de estructura transversal crezca con la separación entre subpupilas, acaba con la significatividad. Respecto a las leyes de potencias, sus predicciones son significativas, situación que creemos que se mantendría si las ametropías de los ojos se hubiesen corregido.

14. Los resultados obtenidos en los casos individual y poblacional muestran la necesidad de reducir la incertidumbre de los datos para que las pruebas de chi cuadrado sean más exigentes. Así, modelos que no describen bien los datos, como las leyes de potencias, deberían ser rechazados también en el caso de los ojos individuales. El hecho de que los modelos de fluctuaciones de modos de segundo orden sean no significativos muestra una baja sensibilidad del método a las fluctuaciones de los modos de alto orden, al menos para nuestros datos. El uso de fuentes con menor coherencia y de patrones de microlentes con focal mayor son dos de las vías a explorar.



## Apéndice I

# PROPOSICIONES LIGADAS AL DIAGRAMA DE CENTROIDES

En este apéndice se demuestran algunas proposiciones realizadas en la sección 5.2, relacionadas con las consecuencias que la isotropía de las variaciones  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  de la aberración tiene en la forma de las nubes de los diagramas de centroides. El punto de partida de las demostraciones de la proposición iii es la expresión (5.5) de la varianza de los centroides para  $\tilde{W}(\mathbf{r})$  homogéneo, que se ha de evaluar para las componentes  $u = \{x, y\}$ . En la demostración de la proposición iv se parte de la ecuación (5.8).

### a) Demostración de la proposición iii para subpupilas circulares

Como se considera que las variaciones de irradiancia en el interior de cada microlente son despreciables, la distribución de irradiancia para una subpupila circular centrada en  $\mathbf{r}_n$  está dada por (2.23). Si todas las microlentes son iguales, entonces:

$$i^{\text{cir}}(\mathbf{r}) = A^{-1}T^{\text{cir}}(\mathbf{r}) = (\pi R^2)^{-1} \text{circ}(\mathbf{r}/R) \quad (\text{I.1})$$

En la expresión (5.5) es necesario sustituir los gradientes en cartesianas de  $i^{\text{cir}}(\mathbf{r})$ , que se obtienen con (2.25). Si se pasa a coordenadas polares y se supone isotropía de  $\tilde{W}(\mathbf{r})$ :

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle \end{bmatrix} = \frac{-1}{2\pi^2 R^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{rr'}{R^2} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \sin \theta' \end{bmatrix} \delta(r-R) \delta(r'-R) D_{\tilde{W}}(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) rr' dr dr' d\theta d\theta' \quad (\text{I.2})$$

El procedimiento a seguir en (I.2) es el de evaluar las deltas de Dirac radiales. Para ello, se expresa el argumento  $\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$  de la función de estructura en coordenadas polares:

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \sin \theta' \end{bmatrix} D_{\tilde{W}} \left\{ \sqrt{2}R [1 - \cos(\theta - \theta')]^{1/2} \right\} d\theta d\theta' \quad (\text{I.3})$$

Usando diferentes identidades trigonométricas (Abramowitz y Stegun 1970: 72):

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle \end{bmatrix} = -\frac{1}{4\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(\theta - \theta') + \cos(\theta + \theta') \\ \cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix} D_{\tilde{w}} \left\{ \sqrt{2}R [1 - \cos(\theta - \theta')]^{1/2} \right\} d\theta d\theta' \quad (I.4)$$

Se realizan ahora los cambios  $\theta_D = \theta - \theta'$ ,  $\theta_S = \theta + \theta'$ :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle &= -\frac{1}{8\pi^2 R^2} \left\{ \int_{-2\pi}^0 d\theta_D D_{\tilde{w}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{-\theta_D}^{\theta_D + 4\pi} d\theta_S (\cos \theta_D + \cos \theta_S) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_D D_{\tilde{w}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{\theta_D}^{-\theta_D + 4\pi} d\theta_S (\cos \theta_D + \cos \theta_S) \right\} \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle &= -\frac{1}{8\pi^2 R^2} \left\{ \int_{-2\pi}^0 d\theta_D D_{\tilde{w}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{-\theta_D}^{\theta_D + 4\pi} d\theta_S (\cos \theta_D - \cos \theta_S) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_D D_{\tilde{w}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{\theta_D}^{-\theta_D + 4\pi} d\theta_S (\cos \theta_D - \cos \theta_S) \right\} \end{aligned} \quad (I.5)$$

A partir de esta expresión se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} (2\pi - \theta_D) \cos \theta_D - \sin \theta_D \\ (2\pi - \theta_D) \cos \theta_D + \sin \theta_D \end{bmatrix} D_{\tilde{w}} \left\{ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right\} d\theta_D \quad (I.6)$$

En consecuencia, para probar que las dos componentes de la varianza son iguales, es suficiente con demostrar que la siguiente integral es igual a cero:

$$I = \int_0^{2\pi} \sin \theta_D D_{\tilde{w}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] d\theta_D \quad (I.7)$$

Si se usan las fórmulas de los senos del ángulo mitad y del ángulo doble (Abramowitz y Stegun 1970: 72) junto con el cambio  $t = \cos(\theta_D/2)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} \sin(\theta_D/2) \cos(\theta_D/2) D_{\tilde{w}} [2R \sin(\theta_D/2)] d\theta_D \\ &= 4 \int_{-1}^{+1} t D_{\tilde{w}} [2R (1 - t^2)^{1/2}] dt \end{aligned} \quad (I.8)$$

El último integrando es una función impar, por lo que  $I = 0$ .

#### b) Demostración de la proposición iii para subpupilas cuadradas

Los cálculos indicados a continuación para las varianzas de los desplazamientos de los centroides con subpupilas iguales y cuadradas son similares a los realizados en el apartado 5.3.1 para obtener la función de estructura de  $\tilde{\mu}_u$ . A partir de (2.22):



$$i^{\text{sq}}(\mathbf{r}) = A^{-1}T^{\text{sq}}(\mathbf{r}) = d^{-2} \text{rect}(\mathbf{r}/d) \quad (\text{I.9})$$

Tras ello, si se sustituye en (5.5) el gradiente de  $i^{\text{sq}}(\mathbf{r})$ , que se obtiene a partir de (2.24):

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle &= -\frac{1}{2d^4} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \left[ \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{d}{2}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{y}{d}\right) \\ &\quad \left[ \delta\left(x' + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(x' - \frac{d}{2}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) D_{\tilde{w}}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle &= -\frac{1}{2d^4} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \left[ \delta\left(y + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(y - \frac{d}{2}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{d}\right) \\ &\quad \left[ \delta\left(y' + \frac{d}{2}\right) - \delta\left(y' - \frac{d}{2}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x'}{d}\right) D_{\tilde{w}}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Las deltas de Dirac se pueden aplicar de manera inmediata:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle &= -\frac{1}{2d^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy dy' \text{rect}\left(\frac{y}{d}\right) \text{rect}\left(\frac{y'}{d}\right) \\ &\quad \left[ 2D_{\tilde{w}}(\|0, y - y'\|) - D_{\tilde{w}}(\|-d, y - y'\|) - D_{\tilde{w}}(\|d, y - y'\|) \right] \\ \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle &= -\frac{1}{2d^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dx' \text{rect}\left(\frac{x}{d}\right) \text{rect}\left(\frac{x'}{d}\right) \\ &\quad \left[ 2D_{\tilde{w}}(\|x - x', 0\|) - D_{\tilde{w}}(\|x - x', -d\|) - D_{\tilde{w}}(\|x - x', d\|) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Ahora se aplica un cambio de variable que reduce las expresiones anteriores a integrales unidimensionales:  $u = y - y'$ ,  $v = y + y'$ . Con esta sustitución, se obtiene el resultado buscado:

$$\langle \tilde{\mu}_x^2 \rangle = \langle \tilde{\mu}_y^2 \rangle = \frac{1}{d^3} \int_{-\infty}^{+\infty} du \left[ D_{\tilde{w}}(\|d, u\|) - D_{\tilde{w}}(\|0, u\|) \right] \text{tri}\left(\frac{u}{d}\right) \quad (\text{I.12})$$

En esta expresión,  $\text{tri}(x)$  es la función definida en (5.20).

### c) Demostración de la proposición iv para subpupilas circulares

Si se sustituye en (5.8) la expresión de los gradientes en cartesianas de  $i^{\text{circ}}(\mathbf{r})$  y se pasa a coordenadas polares:

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = \frac{-1}{2\pi^2 R^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dr dr' d\theta d\theta' \delta(r - R) \delta(r' - R) rr' \frac{rr' \cos\theta \sin\theta'}{R^2} D_{\tilde{w}}(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (\text{I.13})$$

Aplicando las deltas de Dirac radiales y usando una identidad trigonométrica (Abramowitz y Stegun 1970: 72):

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = \frac{-1}{4\pi^2 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta d\theta' [-\sin(\theta - \theta') + \sin(\theta + \theta')] D_{\tilde{W}} \left( \sqrt{2}R [1 - \cos(\theta - \theta')]^{1/2} \right) \quad (\text{I.14})$$

Si se aplica el cambio de variables que se usó con las varianzas en (I.5):

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = \frac{-1}{8\pi^2 R^2} \left[ \int_{-2\pi}^0 d\theta_D D_{\tilde{W}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{-\theta_D}^{\theta_D + 4\pi} d\theta_S (-\sin \theta_D + \sin \theta_S) \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} d\theta_D D_{\tilde{W}} \left[ \sqrt{2}R (1 - \cos \theta_D)^{1/2} \right] \int_{\theta_D}^{-\theta_D + 4\pi} d\theta_S (-\sin \theta_D + \sin \theta_S) \right] \quad (\text{I.15})$$

Se puede comprobar fácilmente que esta expresión es igual a cero.

*d) Demostración de la proposición iv para subpupilas cuadradas*

Presentemos ahora qué sucede si se consideran subpupilas cuadradas. En esta situación, tras aplicar a (5.8) las deltas de Dirac contenidas en (2.24) se llega a:

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = \frac{-1}{2d^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \text{rect}\left(\frac{x}{d}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{d}\right) \left\{ D_{\tilde{W}} \left( \left\| x + \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2} \right\| \right) - D_{\tilde{W}} \left( \left\| x + \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2} \right\| \right) \right. \\ \left. - D_{\tilde{W}} \left( \left\| x - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2} \right\| \right) + D_{\tilde{W}} \left( \left\| x - \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2} \right\| \right) \right\} \quad (\text{I.16})$$

Ahora bien:

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = -\frac{1}{2d^4} \int_{-d/2}^{+d/2} dy \int_{-d/2}^{+d/2} dx \left\{ D_{\tilde{W}} \left( \left\| x + \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2} \right\| \right) - D_{\tilde{W}} \left( \left\| x + \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2} \right\| \right) \right. \\ \left. - D_{\tilde{W}} \left( \left\| x - \frac{d}{2}, y + \frac{d}{2} \right\| \right) + D_{\tilde{W}} \left( \left\| x - \frac{d}{2}, y - \frac{d}{2} \right\| \right) \right\} \quad (\text{I.17})$$

La expresión entre llaves en (I.17) es una función impar con respecto a la variable de integración  $x$ , por lo que dicha integral es igual a cero. Por tanto,  $\Gamma_{\tilde{\mu}}^{x,y} = 0$ .

# Bibliografía

- Abramowitz, M. y Stegun, I.A. (1970), *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, 9ª ed., U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C.
- ANSI (2004), *Methods for Reporting Optical Aberrations of Eyes*, Optical Laboratories Association, Merrifield, Virginia.
- Applegate, R.A., Marsack, J.D. y Thibos, L.N. (2006), "Metrics of retinal image quality predict visual performance in eyes with 20/17 or better visual acuity", *Optom.Vis.Sci.*, vol. 83, nro. 9, pp. 635-640.
- Ares, J., Mancebo, T. y Bará, S. (2000), "Position and displacement sensing with Shack-Hartmann wave-front sensors", *Appl.Opt.*, vol. 39, nro. 10, pp. 1511-1520.
- Arines, J. y Ares, J. (2004), "Significance of thresholding processing in centroid based gradient wavefront sensors: effective modulation of the wavefront derivative", *Opt.Commun.*, vol. 237, nro. 4-6, pp. 257-266.
- Arines, J., Prado, P., Bará, S. y Acosta, E. (2008), "Equivalence of least-squares estimation of eye aberrations in linearly transformed reference frames", *Opt.Commun.*, vol. 281, nro. 10, pp. 2716-2721.
- Arines, J., Pailos, E., Prado, P. y Bará, S. (2009), "The contribution of the fixational eye movements to the variability of the measured ocular aberration", *Ophthal.Physiol.Opt.*, vol. 29, nro. 3, pp. 281-287.
- Arines, J., Prado, P. y Bará, S. (2010), "Pupil tracking with a Hartmann-Shack wavefront sensor", *J.Biomed.Opt.*, vol. 15, nro. 3, pp. 036022.
- Artal, P., Marcos, S., Navarro, R. y Williams, D.R. (1995), "Odd aberrations and double-pass measurements of retinal image quality", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 12, nro. 2, pp. 195-201.
- Artal, P., Chen, L., Fernandez, E.J., Singer, B., Manzanera, S. y Williams, D.R. (2004), "Neural compensation for the eye's optical aberrations", *J.Vision*, vol. 4, nro. 4, pp. 281-287.
- Bakut, P.A., Kirakosyants, V.E., Loginov, V.A., Solomon, C.J. y Dainty, J.C. (1994), "Optimal wavefront reconstruction from a Shack-Hartmann sensor by use of a Bayesian algorithm", *Opt.Commun.*, vol. 109, nro. 1-2, pp. 10-15.
- Bará, S., Mancebo, T. y Moreno-Barriuso, E. (2000), "Positioning tolerances for phase plates compensating aberrations of the human eye", *Appl.Opt.*, vol. 39, nro. 19, pp. 3413-3420.

- Bará, S. (2003), "Measuring eye aberrations with Hartmann-Shack wave-front sensors: Should the irradiance distribution across the eye pupil be taken into account?", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 20, nro. 12, pp. 2237-2245.
- Bará, S., Arines, J., Ares, J. y Prado, P. (2006a), "Direct transformation of Zernike eye aberration coefficients between scaled, rotated, and/or displaced pupils", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 23, nro. 9, pp. 2061-2066.
- Bará, S., Prado, P., Arines, J. y Ares, J. (2006b), "Estimation-induced correlations of the Zernike coefficients of the eye aberration", *Opt.Lett.*, vol. 31, nro. 17, pp. 2646-2648.
- Bará, S. (2007), "Characteristic functions of Hartmann-Shack wavefront sensors and laser-ray-tracing aberrometers", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 24, nro. 12, pp. 3700-3707.
- Barrett, H.H. y Myers, K. (2004), *Foundations of image science*, Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey.
- Boreman, G.D. y Dainty, C. (1996), "Zernike expansions for non-Kolmogorov turbulence", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 13, nro. 3, pp. 517-522.
- Born, M. y Wolf, E. (1999), *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*, 7ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Burns, S.A., Marcos, S., Elsner, A.E. y Bará, S. (2002), "Contrast improvement of confocal retinal imaging by use of phase-correcting plates", *Opt.Lett.*, vol. 27, nro. 6, pp. 400-402.
- Cagigal, M.P. y Canales, V.F. (2000), "Residual phase variance in partial correction: application to the estimate of the light intensity statistics", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 17, nro. 7, pp. 1312-1318.
- Cagigal, M.P., Canales, V.F., Castejón-Mochón, J.F., Prieto, P.M., López-Gil, N. y Artal, P. (2002), "Statistical description of wave-front aberration in the human eye", *Opt.Lett.*, vol. 27, nro. 1, pp. 37-39.
- Campbell, C.E. (2003), "Matrix method to find a new set of Zernike coefficients from an original set when the aperture radius is changed", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 20, nro. 2, pp. 209-217.
- Campbell, C.E. (2006), "Analysis of wavefront-guided corrections to see if they fully correct ocular aberrations", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 23, nro. 7, pp. 1559-1565.
- Campbell, F.W., Robson, J.G. y Westheimer, G. (1959), "Fluctuations of accommodation under steady viewing conditions", *J.Physiol.(Lond.)*, vol. 145, nro. 3, pp. 579-594.
- Cao, G. y Yu, X. (1994), "Accuracy analysis of a Hartmann-Shack wavefront sensor operated with a faint object", *Opt.Eng.*, vol. 33, pp. 2331-2335.

- Castejón-Mochón, J.F., López-Gil, N., Benito, A. y Artal, P. (2002), "Ocular wave-front aberration statistics in a normal young population", *Vision Res.*, vol. 42, nro. 13, pp. 1611-1617.
- Charman, W.N. y Heron, G. (1988), "Fluctuations in accommodation: a review", *Ophthal.Physiol.Opt.*, vol. 8, nro. 2, pp. 153-164.
- Chen, L., Singer, B., Guirao, A., Porter, J. y Williams, D.R. (2005), "Image metrics for predicting subjective image quality", *Optom.Vis.Sci.*, vol. 82, nro. 5, pp. 358-369.
- Cheng, H., Barnett, J.K., Vilupuru, A.S., Marsack, J.D., Kasthurirangan, S., Applegate, R.A. y Roorda, A. (2004a), "A population study on changes in wave aberrations with accommodation", *J.Vision*, vol. 4, nro. 4, pp. 272-280.
- Cheng, X., Bradley, A. y Thibos, L.N. (2004b), "Predicting subjective judgment of best focus with objective image quality metrics", *J.Vision*, vol. 4, nro. 4, pp. 310-321.
- Collins, M., Davis, B. y Wood, J. (1995), "Microfluctuations of steady-state accommodation and the cardiopulmonary system", *Vision Res.*, vol. 35, nro. 17, pp. 2491-2502.
- Conan, R. (2008), "Mean-square residual error of a wavefront after propagation through atmospheric turbulence and after correction with Zernike polynomials", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 25, nro. 2, pp. 526-536.
- Cubalchini, R. (1979), "Modal wave-front estimation from phase derivative measurements", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 69, nro. 7, pp. 972-977.
- Dai, G. (1996), "Modal wave-front reconstruction with Zernike polynomials and Karhunen-Loève functions", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 13, nro. 6, pp. 1218-1225.
- Dalimier, E., Pailos, E., Rivera, R. y Navarro, R. (2009), "Experimental validation of a Bayesian model of visual acuity", *J.Vision*, vol. 9, nro. 7, pp. 1-16.
- Dayton, D., Pierson, B., Spielbusch, B. y Gonglewski, J. (1992), "Atmospheric structure function measurements with a Shack-Hartmann wave-front sensor", *Opt.Lett.*, vol. 17, nro. 24, pp. 1737-1739.
- Devaney, N., Dalimier, E., Farrell, T., Coburn, D., Mackey, R., Mackey, D., Laurent, F., Daly, E. y Dainty, C. (2008), "Correction of ocular and atmospheric wavefronts: a comparison of the performance of various deformable mirrors", *Appl.Opt.*, vol. 47, nro. 35, pp. 6550-6562.
- Diaz-Santana, L. (2000), *Wavefront sensing in the human eye with a Shack-Hartmann sensor*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, London.
- Diaz-Santana, L. y Dainty, J.C. (2001), "Effects of retinal scattering in the ocular double-pass process", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 18, nro. 7, pp. 1437-1444.

- Díaz-Santana, L., Torti, C., Munro, I., Gasson, P. y Dainty, C. (2003), "Benefit of higher closed-loop bandwidths in ocular adaptive optics", *Opt.Express*, vol. 11, nro. 20, pp. 2597-2605.
- Díaz-Santana, L., Walker, G. y Bará, S. (2005), "Sampling geometries for ocular aberrometry: A model for evaluation of performance", *Opt.Express*, vol. 13, nro. 22, pp. 8801-8818.
- Díaz-Santana, L., Guériaux, V., Arden, G. y Gruppette, S. (2007), "New methodology to measure the dynamics of ocular wave front aberrations during small amplitude changes of accommodation", *Opt.Express*, vol. 15, nro. 9, pp. 5649-5663.
- Frieden, B.R. (1991), *Probability, statistical optics and data testing: a problem solving approach*, 2ª ed., Springer-Verlag, Berlin.
- Gao, W., Jonnal, R.S., Cense, B., Kocaoglu, O.P., Wang, Q. y Miller, D.T. (2009), "Measuring directionality of the retinal reflection with a Shack-Hartmann wavefront sensor", *Opt.Express*, vol. 17, nro. 25, pp. 23085-23097.
- Goncharov, A.V., Nowakowski, M., Sheehan, M.T. y Dainty, C. (2008), "Reconstruction of the optical system of the human eye with reverse ray-tracing", *Opt.Express*, vol. 16, nro. 3, pp. 1692-1703.
- González, R.C. y Woods, R.E. (1996), *Tratamiento digital de imágenes*, Addison-Wesley, Díaz de Santos, Argentina et al.
- Goodman, J.W. (1996), *Introduction to Fourier optics*, 2ª ed., McGraw-Hill, New York.
- Goodman, J.W. (2000), *Statistical optics*, Wiley, New York.
- Gruppette, S., Lacombe, F. y Puget, P. (2005), "Study of the dynamic aberrations of the human tear film", *Opt.Express*, vol. 13, nro. 19, pp. 7631-7636.
- Guirao, A., Williams, D.R. y Cox, I.G. (2001), "Effect of rotation and translation on the expected benefit of an ideal method to correct the eye's higher-order aberrations", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 18, nro. 5, pp. 1003-1015.
- Guirao, A. y Williams, D.R. (2003), "A method to predict refractive errors from wave aberration data", *Optom. Vis.Sci.*, vol. 80, nro. 1, pp. 36-42.
- Hampson, K.M., Munro, I., Paterson, C. y Dainty, C. (2005), "Weak correlation between the aberration dynamics of the human eye and the cardiopulmonary system", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 22, nro. 7, pp. 1241-1250.
- He, J.C., Marcos, S., Webb, R.H. y Burns, S.A. (1998), "Measurement of the wave-front aberration of the eye by a fast psychophysical procedure", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 15, nro. 9, pp. 2449-2456.

- He, J.C., Marcos, S. y Burns, S.A. (1999), "Comparison of cone directionality determined by psychophysical and reflectometric techniques", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 16, nro. 10, pp. 2363-2369.
- Hermann, B., Fernández, E.J., Unterhuber, A., Sattmann, H., Fercher, A.F., Drexler, W., Prieto, P.M. y Artal, P. (2004), "Adaptive-optics ultrahigh-resolution optical coherence tomography", *Opt.Lett.*, vol. 29, nro. 18, pp. 2142-2144.
- Herrmann, J. (1981), "Cross coupling and aliasing in modal wave-front estimation", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 71, nro. 8, pp. 989-992.
- Hofer, H., Artal, P., Singer, B., Aragón, J.L. y Williams, D.R. (2001a), "Dynamics of the eye's wave aberration", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 18, nro. 3, pp. 497-506.
- Hofer, H., Chen, L., Yoon, G., Singer, B., Yamauchi, Y. y Williams, D.R. (2001b), "Improvement in retinal image quality with dynamic correction of the eye's aberrations", *Opt.Express*, vol. 8, nro. 11, pp. 631-643.
- Hu, P.H., Stone, J. y Stanley, T. (1989), "Application of Zernike polynomials to atmospheric propagation problems", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 6, nro. 10, pp. 1595-1608.
- Irwan, R. y Lane, R.G. (1999), "Analysis of optimal centroid estimation applied to Shack-Hartmann sensing", *Appl.Opt.*, vol. 38, nro. 32, pp. 6737-6743.
- Iskander, D.R., Collins, M.J., Morelande, M.R. y Mingxia Zhu (2004), "Analyzing the dynamic wavefront aberrations in the human eye", *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, vol. 51, nro. 11, pp. 1969-1980.
- Johnson, R.A. y Wichern, D.W. (2002), *Applied multivariate statistical analysis*, 5ª ed., Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey.
- Lane, R.G. y Tallon, M. (1992), "Wave-front reconstruction using a Shack-Hartmann sensor", *Appl.Opt.*, vol. 31, nro. 32, pp. 6902-6908.
- Larichev, A.V., Ivanov, P.V., Iroshnikov, N.G. y Shmal'gauzen, V.I. (2001), "Measurement of eye aberrations in a speckle field", *Quantum Electron.*, vol. 31, nro. 12, pp. 1108-1112.
- Law, N.F. y Lane, R.G. (1996), "Wavefront estimation at low light levels", *Opt.Commun.*, vol. 126, nro. 1-3, pp. 19-24.
- Leahy, C. (2010), *Temporal Dynamics and Statistical Characteristics of Ocular Wavefront Aberrations and Accommodation*, School of Physics, Science Faculty, National University of Ireland, Galway.
- Leroux, C. y Dainty, C. (2009), "A simple and robust method to extend the dynamic range of an aberrometer", *Opt.Express*, vol. 17, nro. 21, pp. 19055-19061.

- Leroux, C. y Dainty, C. (2010), "Estimation of centroid positions with a matched-filter algorithm: relevance for aberrometry of the eye", *Opt.Express*, vol. 18, nro. 2, pp. 1197-1206.
- Li, C., Xia, M., Liu, Z., Li, D. y Xuan, L. (2009), "Optimization for high precision Shack–Hartmann wavefront sensor", *Opt.Commun.*, vol. 282, nro. 22, pp. 4333-4338.
- Li, K.Y. y Yoon, G. (2006), "Changes in aberrations and retinal image quality due to tear film dynamics", *Opt.Express*, vol. 14, nro. 25, pp. 12552-12559.
- Liang, J., Grimm, B., Goelz, S. y Bille, J.F. (1994), "Objective measurement of wave aberrations of the human eye with the use of a Hartmann-Shack wave-front sensor", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 11, nro. 7, pp. 1949-1957.
- Liang, J. y Williams, D.R. (1997), "Aberrations and retinal image quality of the normal human eye", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 14, nro. 11, pp. 2873-2883.
- Liang, J., Williams, D.R. y Miller, D.T. (1997), "Supernormal vision and high-resolution retinal imaging through adaptive optics", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 14, nro. 11, pp. 2884-2892.
- Llorente, L., Diaz-Santana, L., Lara-Saucedo, D. y Marcos, S. (2003), "Aberrations of the human eye in visible and near infrared illumination", *Optom.Vis.Sci.*, vol. 80, nro. 1, pp. 26-35.
- Lundström, L. y Unsbo, P. (2007), "Transformation of Zernike coefficients: scaled, translated, and rotated wavefronts with circular and elliptical pupils", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 24, nro. 3, pp. 569-577.
- Lundström, L., Gustafsson, J. y Unsbo, P. (2009), "Population distribution of wavefront aberrations in the peripheral human eye", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 26, nro. 10, pp. 2192-2198.
- Mahajan, V.N. (1985), "Line of sight of an aberrated optical system", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 2, nro. 6, pp. 833-846.
- Marchese, L.E., Munger, R. y Priest, D. (2005), "Wavefront-guided correction of ocular aberrations: Are phase plate and refractive surgery solutions equal?", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 22, nro. 8, pp. 1471-1481.
- Mardia, K.V., Kent, J.T. y Bibby, J.M. (1979), *Multivariate analysis*, Academic Press, London et al.
- Martinez-Conde, S., Macknik, S.L. y Hubel, D.H. (2004), "The role of fixational eye movements in visual perception", *Nat.Rev.Neurosci.*, vol. 5, nro. 3, pp. 229-240.
- McLellan, J.S., Marcos, S. y Burns, S.A. (2001), "Age-Related Changes in Monochromatic Wave Aberrations of the Human Eye", *Invest.Ophthalmol.Vis.Sci.*, vol. 42, nro. 6, pp. 1390-1395.



- Mira-Agudelo, A., Lundström, L. y Artal, P. (2009), "Temporal dynamics of ocular aberrations: monocular vs binocular vision", *Ophthalmophysiol.Opt.*, vol. 29, nro. 3, pp. 256-263.
- Moreno-Barriuso, E. y Navarro, R. (2000), "Laser Ray Tracing versus Hartmann--Shack sensor for measuring optical aberrations in the human eye", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 17, nro. 6, pp. 974-985.
- Moreno-Barriuso, E., Lloves, J.M., Marcos, S., Navarro, R., Llorente, L. y Barbero, S. (2001a), "Ocular Aberrations before and after Myopic Corneal Refractive Surgery: LASIK-Induced Changes Measured with Laser Ray Tracing", *Invest.Ophthalmol.Vis.Sci.*, vol. 42, nro. 6, pp. 1396-1403.
- Moreno-Barriuso, E., Marcos, S., Navarro, R. y Burns, S.A. (2001b), "Comparing Laser Ray Tracing, the Spatially Resolved Refractometer, and the Hartmann-Shack Sensor to Measure the Ocular Wave Aberration", *Optom.Vis.Sci.*, vol. 78, nro. 3, pp. 152-156.
- Navarro, R., Moreno-Barriuso, E. y Dorronsoro, C. (1998), "Monochromatic aberrations and point-spread functions of the human eye across the visual field", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 15, nro. 9, pp. 2522-2529.
- Navarro, R., Moreno-Barriuso, E., Bará, S. y Mancebo, T. (2000), "Phase plates for wave-aberration compensation in the human eye", *Opt.Lett.*, vol. 25, nro. 4, pp. 236-238.
- Navarro, R., González, L. y Hernández-Matamoros, J.L. (2006), "On the prediction of optical aberrations by personalized eye models", *Optom.Vis.Sci.*, vol. 83, nro. 6, pp. 371-381.
- Nestares, O., Navarro, R. y Antona, B. (2003), "Bayesian model of Snellen visual acuity", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 20, nro. 7, pp. 1371-1381.
- Nicholls, T.W., Boreman, G.D. y Dainty, J.C. (1995), "Use of a Shack-Hartmann wave-front sensor to measure deviations from a Kolmogorov phase spectrum", *Opt.Lett.*, vol. 20, nro. 24, pp. 2460-2462.
- Noll, R.J. (1976), "Zernike polynomials and atmospheric turbulence", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 66, nro. 3, pp. 207-211.
- Pailos, E., Ommani, A., Diaz-Santana, L. y Bará, S. (2010), "Centroid displacement statistics of the eye aberration", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 27, nro. 8, pp. 1818-1827.
- Papoulis, A. (1991), *Probability, random variables, and stochastic processes*, 3ª ed., McGraw-Hill, New York.
- Pfund, J., Lindlein, N., Schwider, J., Burow, R., Blümel, T. y Elssner, K.-E. (1998a), "Absolute sphericity measurement: a comparative study of the use of interferometry and a Shack-Hartmann sensor", *Opt.Lett.*, vol. 23, nro. 10, pp. 742-744.

- Pfund, J., Lindlein, N. y Schwider, J. (1998b), "Misalignment effects of the Shack-Hartmann sensor", *Appl.Opt.*, vol. 37, nro. 1, pp. 22-27.
- Platt, B.C. y Shack, R. (2001), "History and principles of Shack-Hartmann wavefront sensing", *J.Refrac.Surg.*, vol. 17, nro. 5, pp. S573-S577.
- Porter, J., Guirao, A., Cox, I.G. y Williams, D.R. (2001), "Monochromatic aberrations of the human eye in a large population", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 18, nro. 8, pp. 1793-1803.
- Prieto, P.M., Vargas-Martín, F., Goelz, S. y Artal, P. (2000), "Analysis of the performance of the Hartmann-Shack sensor in the human eye", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 17, nro. 8, pp. 1388-1398.
- Primot, J. (2003), "Theoretical description of Shack-Hartmann wave-front sensor", *Opt.Commun.*, vol. 222, nro. 1-6, pp. 81.
- Rao, C.H., Jiang, W.H. y Ling, N. (1999), "Measuring the power-law exponent of an atmospheric turbulence phase power spectrum with a Shack-Hartmann wave-front sensor", *Opt.Lett.*, vol. 24, nro. 15, pp. 1008-1010.
- Roddier, N.A. (1990), "Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials", *Opt. Eng.*, vol. 29, nro. 10, pp. 1174-1180.
- Roggemann, M.C., Welsh, B.M. y Devey, J. (1994), "Biased estimators and object-spectrum estimation in the method of deconvolution from wave-front sensing", *Appl.Opt.*, vol. 33, nro. 24, pp. 5754-5763.
- Roggemann, M.C. y Welsh, B. (1996), *Imaging through turbulence*, CRC Press, Boca Raton.
- Roorda, A. y Williams, D.R. (1999), "The arrangement of the three cone classes in the living human eye", *Nature*, vol. 397, nro. 6719, pp. 520-522.
- Roorda, A., Romero-Borja, F., Donnelly, W.,III, Queener, H., Hebert, T. y Campbell, M. (2002), "Adaptive optics scanning laser ophthalmoscopy", *Opt.Express*, vol. 10, nro. 9, pp. 405-412.
- Rousset, G. (1999), "Wave-front sensors", en *Adaptive optics in astronomy*, ed. F. Roddier, University Press, Cambridge, pp. 91-132.
- Salmon, T.O. y van de Pol, C. (2006), "Normal-eye Zernike coefficients and root-mean-square wavefront errors", *Journal of Cataract & Refractive Surgery*, vol. 32, nro. 12, pp. 2064-2074.
- Schwiegerling, J. y Neal, D.R. (2005), "Historical Development of the Shack-Hartmann Wavefront Sensor", en *Robert Shannon and Roland Shack: legends in applied optics*, eds. J.E. Harvey y R.B. Hooker, SPIE Press, Bellingham, Washington, pp. 132.

- Schwiegerling, J. (2009), "Statistical generation of normal and post-refractive surgery wavefront", *Clin.Exp.Optom.*, vol. 92, nro. 3, pp. 223-226.
- Sen, A.K. y Srivastava, M.S. (1990), *Regression analysis: theory, methods and applications*, Springer-Verlag, New York.
- Shack, R.V. y Platt, B.C. (1971), "Production and use of a lenticular Hartmann screen", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 61, nro. 5, pp. 656.
- Silbaugh, E.E. (1995), *Characterization of Atmospheric Turbulence over Long Horizontal Paths Using Optical Slope Measurements*, School of Engineering, U.S. Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio.
- Silbaugh, E.E., Welsh, B.M. y Roggemann, M.C. (1996), "Characterization of atmospheric turbulence phase statistics using wave-front slope measurements", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 13, nro. 12, pp. 2453-2460.
- Solomon, C.J., Dainty, J.C. y Woodey, N.J. (1995), "Bayesian estimation of atmospherically distorted wavefronts using Shack-Hartmann sensors", *Optical Rev.*, vol. 2, nro. 3, pp. 217-220.
- Soloviev, O. y Vdovin, G. (2005), "Hartmann-Shack test with random masks for modal wavefront reconstruction", *Opt.Express*, vol. 13, nro. 23, pp. 9570-9584.
- Southwell, W.H. (1980), "Wave-front estimation from wave-front slope measurements", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 70, nro. 8, pp. 998-1006.
- Strang, G. (2003), *Introduction to linear algebra*, 3<sup>a</sup> ed., Wellesley-Cambridge, Wellesly, Massachusetts.
- Stribling, B.E., Welsh, B.M. y Roggemann, M.C. (1995), "Optical Propagation in Non-Kolmogorov Atmospheric Turbulence", en *Atmospheric Propagation and Remote Sensing IV*, ed. J.C. Dainty, Proc. SPIE, Orlando, Florida, pp. 181-196.
- Takato, N., Iye, M. y Yamaguchi, I. (1994), "Wavefront reconstruction error of Shack-Hartmann wavefront sensors", *Publ. Astron. Soc. Pacific*, vol. 106, nro. 696, pp. 182-188.
- Tatarskii, V.I. (1971), *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
- Teague, M.R. (1982), "Irradiance moments: their propagation and use for unique retrieval of phase", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 72, nro. 9, pp. 1199-1209.
- Thibos, L.N., Applegate, R.A., Schwiegerling, J.T., Webb, R. y VSIA Standards Taskforce Members (2002a), "Standards for reporting the optical aberrations of eyes", *J.Ref.Surg.*, vol. 18, nro. 5, pp. S652-S660.

- Thibos, L.N., Bradley, A. y Hong, X. (2002b), "A statistical model of the aberration structure of normal, well-corrected eyes", *Ophthal.Physiol.Opt.*, vol. 22, nro. 5, pp. 427-433.
- Thibos, L.N., Hong, X., Bradley, A. y Cheng, X. (2002c), "Statistical variation of aberration structure and image quality in a normal population of healthy eyes", *J.Opt.Soc.Am.A*, vol. 19, nro. 12, pp. 2329-2348.
- Thibos, L.N., Hong, X., Bradley, A. y Applegate, R.A. (2004), "Accuracy and precision of objective refraction from wavefront aberrations", *J.Vision*, vol. 4, nro. 4, pp. 329-351.
- Thibos, L.N. (2009), "Retinal image quality for virtual eyes generated by a statistical model of ocular wavefront aberrations", *Ophthal.Physiol.Opt.*, vol. 29, nro. 3, pp. 288-291.
- Tyson, R.K. (1991), *Principles of adaptive optics*, Academic Press, Boston.
- Voitsekhovich, V.V., Bará, S., Ríos, S. y Acosta, E. (1998), "Minimum-variance phase reconstruction from Hartmann sensors with circular subpupils", *Opt.Commun.*, vol. 148, nro. 4-6, pp. 225-229.
- Wallner, E.P. (1983), "Optimal wave-front correction using slope measurements", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 73, nro. 12, pp. 1771-1776.
- Wang, J.Y. y Markey, J.K. (1978), "Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion", *J.Opt.Soc.Am.*, vol. 68, nro. 1, pp. 78-87.
- Winn, B., Pugh, J.R., Gilmartin, B. y Owens, H. (1990), "Arterial pulse modulates steady-state ocular accommodation", *Curr.Eye Res.*, vol. 9, nro. 10, pp. 971-975.
- Zhu, M., Collins, M.J. y Iskander, D.R. (2004), "Microfluctuations of wavefront aberrations of the eye", *Ophthalmic and Physiological Optics*, vol. 24, nro. 6, pp. 562-571.